


FONDO PROVINCIA

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DU
CALCUL DES INÉQUATIONS.



On trouve chez le même Libraire les ouvrages suivans, du même auteur :

Principes d'Economie Politique, ouvrage couronné par l'Institut national, revu et augmenté par l'auteur, 1 vol. in-8°, 3 fr.

Moyens de perfectionner le Jury, ouvrage couronné par l'Institut, petit in-12, 1 fr. 50 cent.

On trouve encore chez le même Libraire :

L'Histoire de France abrégée et chronologique, depuis la première expédition des Gaulois jusqu'en septembre 1808, avec un plan de Paris avec ses divers accroissemens, 2 vol. in-8°. de 1600 pages, 16 fr.

Système de Chimie de Thompson, avec une introduction par M. Berthollet, membre de l'Institut, 9 vol. in-8°, avec 300 tableaux et des planches, pour Paris, 58 fr.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DU

CALCUL DES INÉQUATIONS,

PAR N. F. CANARD,

Professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée de Moulins.



DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire de l'École Impériale Polytechnique et de celle des Ponts et Chaussées, quai des Augustins, nº 25.

1808.

TABLE DES CHAPITRES.

AVANT-PROPOS........................... Pag. 1

PREMIÈRE PARTIE.

De la résolution des équations composées à une seule inconnue........... 5

CHAP. Ier. Des propriétés générales des équations. Précis des méthodes connues les plus simples pour résoudre les équations algébriques du troisième et du quatrième degré..................... 6

De la résolution des équations algébriques du troisième degré........................... 22

De la résolution des équations du quatrième degré................................ 27

CHAP. II. Principes et règles du calcul des inéquations: du double point de vue sous lequel il faut considérer les quantités négatives relativement au rapport d'inéquation...................... 31

Des quantités métanégatives et pronégatives... 36

Première règle......................... 41

Deuxième règle.........................ibid.

Troisième règle......................... 42

Quatrième règle.........................ibid.

Cinquième règle......................... 45

Des rapports d'inéquation additionnels et multiples. 50

Des logarithmes des quantités négatives...... 60

CHAP. III. De la résolution des équations algébriques du troisième degré..................... 73

SECT. 1re. Premier mode de solution, ou mode de solution simple ... 74
Première méthode de solution simple ... *ibid.*
De l'inéquation ... 76
Des racines imaginaires ... 97
De la concentration directe ... 107
Règle générale de concentration ... 117
De la concentration de compensation ... 122
De la résolution des valeurs de x, ou deuxième mode de solution simple ... 133
Formule de solution des racines négatives ... 150
Formule de solution des racines qui ont toutes le même signe ... 154
Concentration des racinesimaginair es ... 172
SECT. II. Deuxième mode de solution, ou méthode de solution double ... 175
Formule de décomposition algébrique ... 203
CHAP. IV. De la résolution des équations du quatrième degré ... 215
SECT. 1re. Premier mododе solution, ou mode de solution simple de la résolution des valeurs de p, ou première méthode de solution simple ... *ibid.*
Loi de concentration pour les racines égales ... 229
De la résolution des valeurs de x, ou deuxième mode de solution simple ... 236
SECT. II. Deuxième mode de solution, ou mode de solution double ... 260
Des racines imaginaires ... 271
CHAP. V. De la résolution des équations du cinquième degré ... 285
SECT. 1re. Premier mode de solution, ou mode de solution simple ... *ibid.*

De la résolution des valeurs de p, ou première méthode de solution simple................ 285
De la résolution des valeurs de x, ou deuxième méthode de solution simple............... 289
Sect. II. Deuxième mode de solution, ou mode de solution double......................... 295
CHAP. VI. De la résolution des équations du degré n. 299
Tableau des formules de solution pour le degré n. 304
CHAP. VII. De la décomposition des équations en facteurs réels du deuxième degré................ 315
Sect. Ire. De la résolution des équations du quatrième degré.............................. *ibid.*
Sect. II. De la résolution des équations du cinquième degré................................ 355
Sect. III. De la résolution des équations du sixième degré................................ 360
Sect. IV. De la décomposition des équations en facteurs du troisième degré.................... 366
CHAP. VIII. Du principe de l'inégalité des racines. 370

DEUXIEME PARTIE.

De la résolution des équations à plusieurs variables..................... 403
CHAP. Ier. De la résolution des équations qui renferment y à la première puissance et avec une fonction de x à un degré quelconque......... 413
CHAP. II. De la résolution des équations dans lesquelles une des deux variables ne se trouve qu'au premier et au deuxième degré, et l'autre à un degré quelconque..... 435

SECT. Ire. De la résolution des équations du second-second degré. 435
SECT. II. De la résolution des équations du deuxième-troisième degré, du deuxième-quatrième, etc. 440
CHAP. III. De la résolution des équations à deux variables, dans lesquelles l'une des deux variables ne se trouve qu'au premier, au second et au troisième degré, et l'autre à un degré quelconque. 445
SECT. Ire. De la résolution des équations du troisième-troisième degré. 446
De la concentration. 472

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

AVANT-PROPOS.

Le calcul des inéquations est le mode général de la décomposition algébrique. Pour résoudre un problême ou une question quelconque, on traduit les conditions qu'il renferme en langage algébrique : si l'inconnue n'est multipliée qu'avec des quantités connues, on parvient par les règles de l'algèbre à l'en dégager, et on l'obtient *seule* dans un des membres de l'équation : le problême est alors résolu. Il se résout encore avec la même simplicité dans les équations de la forme $x^m = A$ qu'on appelle équations à deux termes, on a immédiatement $x = \sqrt[m]{A}$.

Mais il n'en est pas de même lorsque l'inconnue se trouve élevée à différentes puissances dans les différens termes de l'équation ; on parvient par les règles de l'algèbre à ramener l'équation composée à la forme générale

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Mx + N = o.$$

C'est-là que se terminent leur secours. Lorsque l'équation n'est que du second degré $x^2+Ax+B=0$, on obtient pour ses deux valeurs la formule générale de solution $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$. Mais cette solution n'est due qu'à un artifice du calcul qui ne s'étend pas plus loin.

Les algébristes ont tourmenté les équations composées de toutes les manières pour en obtenir des formules de solution comme celle du second degré; mais tous les artifices du calcul qu'ils ont imaginés n'ont pu aboutir qu'à donner une solution imparfaite des équations du troisième et du quatrième degré : les formules qu'ils ont obtenues sont embarrassées de quantités imaginaires dans le cas où les racines de l'équation sont toutes réelles.

L'impossibilité d'aller plus loin fait voir que les équations ne peuvent pas se décomposer par la méthode elle-même des équations. C'est par le *calcul des inéquations* qu'on parvient à démêler les inconnues dans tous les cas, et qu'on obtient des formules algébriques qui conduisent aux valeurs des

racines dans les équations composées d'une seule ou de plusieurs inconnues.

On peut décomposer l'analyse en deux opérations bien distinctes: dans la première on traduit en algèbre la question à résoudre ; cette première opération peut être considérée comme une composition ; c'est ensuite le calcul des inéquations qui décompose. De sorte que dans les opérations de l'analyse, ce calcul est à la composition algébrique, ce que dans ces opérations de l'arithmétique, la division est à la multiplication, et ce que l'extraction des racines est à l'élévation aux puissances.

Le calcul des inéquations se divise en deux parties; la première contient la résolution algébrique des équations de tous les degrés à une seule inconnue ; la seconde traite de la résolution des équations composées à plusieurs inconnues. Lorsque dans ce deuxième cas on n'a qu'une seule équation, les inconnues sont des variables dont on détermine la suite des valeurs à l'aide des formules algébriques, obtenues dans la première partie en traduisant géométrique-

ment ces suites de valeurs correlatives, il en résulte la théorie des courbes des différens degrés. Elles ne sont dans le calcul des inéquations qu'une méthode graphique préparatoire pour parvenir à déterminer les valeurs avec toute la précision que peut donner le calcul numérique.

Lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, on parvient, par ce moyen, à déterminer immédiatement la valeur de chacune d'elles, sans qu'il soit nécessaire de former une équation finale à une seule inconnue par la méthode d'élimination : méthode qu'on peut regarder comme impraticable par l'excessive prolixité du calcul qu'elle exige et qui a le défaut de surcomposer l'équation avant de la résoudre.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DU
CALCUL DES INÉQUATIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

De la résolution des équations composées à une seule inconnue.

Quoique les méthodes de solution que l'on développe ne s'appuient que sur la formule connue de la résolution des équations du deuxième degré ; cependant, pour rendre cet ouvrage complet, j'ai cru nécessaire d'exposer, dans un premier chapitre, les propriétés générales des équations, et de donner un précis des méthodes les plus simples qui ont été imaginées jusqu'à présent pour résoudre les équations algébriques. Les formules connues de la résolution des équations du troisième degré renferment une fonction composée dont

on retrouve les élémens dans le calcul des inéquations. On y reconnaîtra le principe du cas irréductible qui se trouve décomposé : et l'on verra comment, selon les apperçus de La Grange, les formules de solution algébrique des différens degrés, si on pouvait les obtenir, ne pourraient donner que des formules en expressions imaginaires. Car le calcul des inéquations, en ne donnant que des quantités réelles dans les formules de solution des équations de tous les degrés, quand les racines sont réelles, présente en même temps la manière dont elles sont séparées des expressions imaginaires avec lesquelles elles resteraient combinées, si l'on parvenait à les résoudre par les règles connues de l'algèbre.

CHAPITRE PREMIER.

Des propriétés générales des équations. Précis des méthodes connues, les plus simples pour résoudre les équations algébriques du troisième et du quatrième degré.

I. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS.

1. Les équations composées se ramènent, comme on l'a dit à la formule générale,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Mx + N = 0.$$

La première propriété de ces équations, qu'on peut regarder comme un fait analytique, consiste en ce que leur résultat peut devenir $=0$ en substituant à la place de x plusieurs valeurs différentes. Ces valeurs doivent donc être considérées comme appartenant toutes à l'équation : on les appelle racines. Ainsi si les quantités a, b, c, $-d$, $-e$, $-f$, etc. satisfont également à l'équation, en rendant son résultat $=0$ par leur substitution à la place de x, on aura également $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=-d$, etc. : ce qui ne veut pas dire que l'inconnue que l'on cherche a toutes ces valeurs, mais seulement qu'elle a l'une ou l'autre.

En analysant les équations composées d'après cette propriété, on démontre qu'elles peuvent être ramenées à un produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e), \text{etc.} = 0$$

d'autant de facteurs simples qu'il y a de valeurs qui sont susceptibles par leur substitution à la place de x de rendre leur résultat $=0$, et que la limite du nombre de ces facteurs est égale au nombre des unités du degré de l'équation.

En effet, supposons que a soit une des racines de l'équation, en mettant sa valeur à

la place de x, l'équation génerale deviendra

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} \ldots + Ma + N = 0 \ (1).$$

Si je mets pour N dans la proposée la valeur qu'on obtient de cette dernière équation ; on aura

$$(x^m - a^m) + A(x^{m-1} - a^{m-1}) + B(x^{m-2} - ax^{m-2}) \ldots + M(x - a) = 0.$$

Or tous les termes de cette équation sont divisibles par $x - a$, et la proposée, toute réduction faite, acquiert la forme suivante en appelant A', B', C', etc. les coëfficiens qu'on obtient

$$(x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} \ldots + M)(x - a) = 0 \ (2).$$

Or, maintenant, si cette équation a une autre valeur b qui rende son résultat $=0$, en substituant b à la place de x, on aura comme ci-dessus (1)

$$(b^{m-1} + A'b^{m-2} + B'b^{m-2} \ldots + M')(b - a) = 0,$$

le facteur $b - a$ ne peut pas être $=0$, il faut donc que l'on ait

$$b^{m-1} + A'b^{m-2} + B'b^{m-3} \ldots + M = 0 \ (3)$$

ou en mettant x à la place de b,

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + Bx^{m-3} \ldots + M = 0 \ (4).$$

Ainsi les deux facteurs de l'équation (2) sont séparément $=0$, non pas à la fois, mais successivement en faisant $x = a$, $x = b$.

Maintenant en prenant la valeur de M dans

l'équation (3), et la substituant dans l'équation (4), on aura comme ci-dessus

$$(x^{m-1}-bx^{m-1})+A'(x^{m-2}-Bx^{m-2})+\ldots+L'(x-b)=0$$

qui sera divisible par $x-b$, et donnera une nouvelle équation de la forme

$$(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}\ .\ .\ .+L')(x-b),$$

en opérant comme pour l'équation (2).

La proposée sera donc ramenée à la forme,

$$x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}\ldots+L')(x-a)(x-b)=0,$$

si une troisième valeur $x=c$ rend encore le résultat de l'équation identique, on parviendra, en opérant de même, à ramener l'équation générale à la forme

$$x^{m-3}+A'''x^{m-4}+B'''x^{m-5}+Q)(x-a)(x-b)(x-c)=0,$$

et ainsi de suite. On voit que l'équation s'abaisse d'un degré à chaque valeur de x qui rend son résultat $=0$; la limite de la décomposition sera donc lorsque l'équation sera amenée à ce degré de composition

$$(x+A^{\mu})(x-a)(x-b)(x-c)\ .\ .\ .\ (x-m)=0$$

alors l'équation proposée réduite au facteur b simple $x+A^{\mu}$ sera le dernier facteur qui ne pourra plus se décomposer. Il pourra donc y avoir autant de facteurs qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, et il ne pourra pas y en avoir davantage.

2. Il faut considérer que cette démonstration ne s'applique rigoureusement qu'aux racines réelles et commensurables de l'équation ; il n'y a que ces espèces de valeurs qui puissent rendre son résultat $=0$. Lorsque l'équation n'a que des racines incommensurables, il n'est pas possible d'assigner une valeur qui puisse en rendre le résultat $=0$, c'est ce qui constitue la propriété d'incommensurable.

Mais il faut remarquer que les équations composées ont encore la propriété de donner des résultats qui changent de signe en substituant à la place de x, successivement différentes valeurs : or, de cette propriété, il faut encore conclure que l'équation est composée d'autant de facteurs inégaux $(x-a)(x-b)$ $(x-c)$ etc. qu'il y a de changemens de signe dans les résultats de l'équation, quoique ces racines soient incommensurables, ou quoiqu'on ne puisse pas assigner une valeur qui rende l'équation $=0$.

En effet, supposons que dans une équation composée quelconque, on obtienne d'abord un résultat positif en substituant à la place de x une valeur p, qu'ensuite on obtienne un résultat négatif, en substituant une autre valeur q, je dis qu'entre ces deux valeurs p et q il y a nécessairement une valeur assignable,

ou non, qui doit rendre le résultat de l'équation $=0$: car puisque l'on passe du positif au négatif, il faut nécessairement conclure qu'en supposant une infinité de valeurs entre p et q, on arrivera, en partant de p vers q, à la limite des valeurs dont la substitution rend le résultat de l'équation positif, et en partant de q vers p, à la limite de celles qui rendent ce résultat négatif; or ces deux limites opposées coïncident nécessairement à la valeur assignable, ou non, qui doit rendre le résultat de l'équation $=0$, donc il faut conclure que l'équation a une racine réelle entre p et q.

Pareillement si en continuant les substitutions, j'obtiens un autre changement de signe dans les résultats de l'équation entre les deux substitutions p' et q', il s'ensuivra par la même raison que l'équation a une autre racine réelle entre ces deux valeurs; et ainsi de suite. D'où l'on doit conclure que toute équation composée a autant de racines réelles $x=a$, $x=b$, $x=c$ qu'on peut obtenir de changemens de signe dans les résultats de l'équation, et qu'elle peut être également considérée comme composée de facteurs simples $(x-a)$ $(x-b)$ $(x-c)$ etc. $=0$, dont le nombre peut être égal à celui du degré de l'équation, par le même raisonnement qu'on a développé ci-dessus.

3. Le nombre des racines de l'équation ne peut être égal à celui du degré de l'équation que quand toutes les racines sont réelles. Mais il arrive souvent que l'équation se trouve multipliée par un facteur composé $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} +$ etc. dont le résultat est toujours positif, quelque valeur que l'on suppose à x, soit négative, soit positive. Comme il ne peut jamais devenir $=0$, on doit conclure que ce facteur n'a pas de racines. En le supposant $=0$, on fait une erreur, et les valeurs de x qu'on peut obtenir sont imaginaires, c'est-à-dire impossibles : leur expression indique l'erreur qu'on a commise en faisant le facteur composé $=0$.

En considérant donc les racines a, b, c, d, etc. comme des valeurs réelles ou imaginaires, on pourra dire généralement que toute équation est décomposable en facteurs simples $(x-a)(x-b)(x-c)$ etc. $=0$, dont le nombre est toujours égal à celui du degré de l'équation.

4. On démontre que toutes les racines imaginaires dans une équation quelconque, qui a tous ses coëfficiens réels, ne peuvent se trouver que par paires de la forme

$$\begin{cases} x=a+b\sqrt{-1} \\ x=a-b\sqrt{-1}, \end{cases} \begin{cases} x=a'+b'\sqrt{-1} \\ x=a'-b'\sqrt{-1}, \end{cases} \begin{cases} x=a''+b''\sqrt{-1} \\ x=a''-b''\sqrt{-1} \end{cases} \text{etc.}$$

En effet, supposons qu'une équation con-

tienne une racine imaginaire ; or quelle que soit la forme sous laquelle on pourrait l'obtenir, on sait que toute expression imaginaire se ramène à la forme $x=a\pm b\sqrt{-1}$, par conséquent s'il y a une racine imaginaire dans l'équation, elle peut se ramener à cette forme. Supposons donc que la valeur de cette racine soit $x=a+b\sqrt{-1}$, en substituant cette valeur dans la proposée, elle rendra son résultat $=0$, on aura donc

$$(a+b\sqrt{-1})^m+A(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+B(a+b\sqrt{-1})^{m-2}+\text{etc.}=0.$$

En effectuant, on aura pour résultat une équation de la forme

$$P+Q\sqrt{-1}=0.$$

Or, maintenant, cette expression ne peut être $=0$ qu'autant que P ou la somme de tous les termes réels sera $=0$ séparément. Il ne peut pas être $=0$ conséquemment à la valeur de $Q\sqrt{-1}$, parce que des quantités imaginaires soustraites des quantités réelles, ne peuvent donner un reste nul : donc $Q\sqrt{-1}=0$ séparément, donc on a

$$P=0,\quad Q=0.$$

Supposons, maintenant, qu'à la place de x on substitue la valeur $a-b\sqrt{-1}$, dans la proposée elle deviendra

$$(a-b\sqrt{-1})^m+A(a-b\sqrt{-1})^{m-1}+\text{etc.}=0.$$

Cette équation ne diffère de la précédente que par le signe qui précède les quantités imaginaires; en l'effectuant, elle deviendra donc

$$P-Q\sqrt{-1};$$

or on a $P=0$, $Q=0$, donc on a

$$P-Q\sqrt{-1}=0;$$

donc l'équation contient encore la racine $x=a-b\sqrt{-1}$.

Si je multiplie cette dernière racine avec la précédente, j'aurai le facteur réel du deuxième degré,

$x^2-2ax+a^2+b^2=0$, ou $(x-a)^2+b^2=0$;

par conséquent l'équation proposée sera

$(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}...+J)(x^2-2ax+a^2+b^2)=0.$

Supposons maintenant que l'équation ait une racine imaginaire $x=a'+b'\sqrt{-1}$. En substituant sa valeur dans cette dernière, elle deviendra

$$[(a'+b'-\sqrt{-1})^{m-2}+A'(a'+b'\sqrt{-1})^{m-3}+\text{etc.})$$
$$(a'+b'\sqrt{-1})^2-2a(a'+b'\sqrt{-1})+a^2+b^2]=0.$$

Cette équation ne peut être $=0$ que par son premier facteur, et non par le facteur double $(a'+b'\sqrt{-1})^2-$ etc. Si on effectue les différens termes, on aboutira au résultat

$$P'+Q'\sqrt{-1}=0.$$

On démontrera, comme ci-dessus, que l'on a $b''=0$, $Q''=0$, d'où l'on conclura encore que l'équation a une autre racine $x=a'-b'\sqrt{-1}$, et que par conséquent elle contient encore le facteur réel du deuxième degré

$$x^2-2a'x+a'^2+b'^2=0, \text{ ou } (x-a')^2+b'^2=0;$$

par conséquent la proposée se ramenera à l'expression

$$(x^{m-4}+A'''x^{m-5}+\text{etc.})(x^2-2ax+a^2+b^2)$$
$$(x^2-2a'x+a'^2+b'^2)=0.$$

On fera le même raisonnement pour une troisième racine imaginaire, $x=a''+b''\sqrt{-1}$; et ainsi de suite. On parviendra donc à décomposer l'équation en facteurs réels du deuxième degré, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le dernier facteur double, $x^2+A''^{-1}x+B''^{-1}=0$, si l'équation est d'un degré pair, ou le dernier facteur simple $x+A^{\mu}$, si elle est d'un degré impair; ces deux facteurs ne contiennent que des quantités réelles.

5. Delà il suit, 1°. que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle;

6. 2°. Que *toute équation, quelles que soient ses racines, réelles ou imaginaires, est décomposable en facteurs réels du deuxième degré.*

Cette décomposition peut toujours s'effec-

tuer par le calcul des inéquations, comme on le verra.

On peut remarquer maintenant que pour former un polynome, composé avec des racines imaginaires, et qui ne contienne cependant que des coëfficiens réels, on ne peut y introduire que des racines imaginaires par paires, telles qu'on vient de le dire. En effet, comme $a+b\sqrt{-1}$ et $-b\sqrt{-1}$ donnent la même valeur élevée à une puissance paire quelconque, et qu'elles conservent leur signe étant élevée à une puissance impaire ; si on multiplie plusieurs paires de facteurs imaginaires de cette forme $x-a+b\sqrt{-1}$ et $x-a-b\sqrt{-1}$, les unes par les autres, les racines imaginaires, précédées du signe $+$, seront multipliées par les mêmes quantités que celles qui sont précédées du signe $-$, elles se détruiront donc toutes. Ce qui ne pourrait pas avoir lieu, s'il s'en trouvait une seule racine imaginaire qui ne fût pas appareillée, ou s'il s'en trouvait une paire qui n'eût pas les conditions requises.

7. Je viens maintenant au changement de signe, produit dans le résultat de l'équation, par les différentes substitutions de x, au passage d'une racine réelle à la suivante : on voit évidemment qu'il ne doit plus y avoir de variations de signe, quand on a franchi les va-

leurs de toutes les racines réelles. Voici comment on détermine la limite de ces variations. D'abord il faut remarquer que quel que soit le degré d'une équation et quelle que soit la valeur de ses coëfficiens, on peut toujours assigner un nombre qui rende le premier terme supérieur à la somme de tous les autres. Pour s'en convaincre et pour trouver, en même temps la valeur qu'il faut donner à x, afin d'y parvenir, je prends le cas le plus défavorable, celui où tous les coëfficiens de l'équation seront négatifs et égaux ; c'est-à-dire, si au lieu de

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + N = 0,$$

on avait $x^m - {}^1Sx^{m-1} - Sx^{m-2} \ldots Sx - S = 0$,

S désignant le plus grand des coëfficiens A, B, C, etc. Je donne à cette équation la forme

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} \ldots + 1) = 0,$$

d'où $x^m = S(x^{m-1} + x^{m-2} + \text{etc.}) = S\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right)$

puis $x^m = \frac{Sx^m}{x-1} - \frac{S}{x-1}$.

Je rendrai le premier terme x^m de la proposée plus grand que le deuxième membre de cette dernière équation, qui représente la somme de tous ses autres termes, en faisant

$$x^m = \frac{Sx^m}{x-1}, \text{ d'où l'on aura } 1 = \frac{S}{x-1}$$

puis $x = S + 1$;

c'est-à-dire, que pour rendre le premier terme x^m supérieur à la somme de tous les autres, il faut substituer, dans l'équation, à la place de x un nombre égal au plus grand coëfficient augmenté d'une unité. Or ce nombre est la limite de la plus grande racine positive de l'équation : car toute autre quantité, supérieure à ce nombre, ne pourra plus faire changer le signe du résultat de l'équation. Si les racines de l'équation étaient toutes négatives, leur limite serait $-(S+1)$ par la même raison. Enfin, si elles étaient en partie positives et en partie négatives, elles auraient, à plus forte raison, cette limite.

Mais, pour juger de la latitude de cette limite, je l'applique à l'équation

$$x^3+6x^2+11x+6=0$$

dont les facteurs sont $(x+1)(x+2)(x+3)=0$. La plus grande de ces trois racines est $-(3)$, et leur limite est $-(11+1)=-(12)$. On peut voir, par cet exemple, combien cette limite est vague, puisqu'elle est quadruple de la valeur de la plus grande racine.

Quoi qu'il en soit de cette limite, il suit de ce qu'on vient de dire, 1°. qu'une équation d'un degré impair a nécessairement une racine réelle, comme on l'a déjà démontré : car je puis donner à x^m, dont l'exposant est

impair, une valeur négative ou positive qui surpasse la somme de tous les autres termes, quelle que soit leur valeur ; je puis donc toujours obtenir un changement de signe dans le résultat de l'équation ; il y aura donc une racine réelle : donc le polynome, qui ne contient que des racines imaginaires, ne peut être que d'un degré pair ;

2°. Toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif, a nécessairement deux racines réelles. Car si je fais $x=0$, le résultat de l'équation se réduira au dernier terme, il sera donc négatif. Je puis ensuite supposer à x une valeur négative ou positive, telle que le premier terme x^m, que son exposant rend toujours positif, soit plus grand que la somme de tous les autres, le résultat sera donc positif, il y aura donc changement de signe, il y aura d'abord une racine réelle ; mais l'équation dégagée de cette racine sera d'un degré impair ; donc, par cette raison, elle aura encore une racine réelle ; donc une équation, d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.

8. Puisque toute équation peut être considérée comme composée de facteurs $(x-a)$ $(x-b)(x-c)$ etc. $=0$ réelles ou imaginaires, on peut composer synthétiquement

une équation de cette manière ; et la combinaison des racines, dans les différens coëfficiens, doit servir à découvrir les moyens de décomposer les différentes équations que présente l'analyse, et qui ont toujours une origine différente de celle-ci.

Si je compose une équation seulement avec les quatre racines $(x \mp a)(x \mp b)(x \mp c)(x \mp d) = 0$, j'aurai

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \mp a \\ \quad \mp b \\ \quad \mp c \\ \quad \mp d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^3 + ab \\ \quad + ac \\ \quad + ad \\ \quad + bc \\ \quad + bd \\ \quad + cd \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 \mp abc \\ \quad \mp abd \\ \quad \mp acd \\ \quad \mp bcd \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + abcd \end{array}\right\} = 0.$$

Je remarque, 1°. que le deuxième terme a pour coëfficient la somme de toutes les racines, chacune avec le signe qu'elle a dans son facteur, ou avec un signe contraire à celui de sa valeur ; que le troisième terme a pour coëfficient la somme des produits des racines multipliées deux à deux ; que le quatrième a pour coëfficient la somme des produits des racines multipliées trois à trois, et ainsi de suite. Qu'enfin le dernier terme qui n'est point affecté de l'inconnue x, et qui est ici le cinquième, est le produit de toutes les racines de

l'équation. On démontre que ces lois ont lieu quel que soit le nombre des racines.

Je remarque, en second lieu, que lorsque les racines sont positives $x=a$, $x=b$, etc., les coëfficiens sont alternativement négatifs et positifs ; c'est-à-dire, qu'ils sont négatifs dans ceux où les racines sont multiples à un degré impair, et positifs dans ceux où elles sont multiples à un degré pair : ce qui doit être. Au contraire, quand les racines sont toutes négatives, elles sont positives dans leur facteur $(x+a)(x+b)(x+c)$ etc., ce qui rend tous les produits des racines positifs, et, par conséquent, tous les coëfficiens positifs. Ainsi l'équation générale des racines, toutes positives, doit avoir cette forme :

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - \text{etc.} = 0,$$

et celles des racines toutes négatives,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} = 0.$$

Cet ordre est interverti d'abord par les racines imaginaires, ensuite lorsque les racines sont en partie positives et en partie négatives. Il est inutile de discuter ces deux cas.

9. Mais il est bon de remarquer que l'on peut toujours ramener une équation à avoir toutes ses racines, du même signe, ou toutes négatives ou toutes positives. Car soit l'équa-

tion qui a pour facteurs

$$(x-5)(x-3)(x+1)(x+4)=0;$$

si je fais $x=y+6$, j'aurai

$$(y+6-5)(y+6-3)(y+6+1)(y+6+4)=0;$$

les racines seront alors toutes négatives. En faisant au contraire $x=y-5$, j'aurai

$$(y-10)(y-8)(y-4)(y-1)=0;$$

les racines sont alors toutes positives.

Il suffit, comme on voit, de faire $x=y+a$, et de prendre pour a une valeur qui surpasse la plus grande racine positive, pour les avoir toutes négatives ou réciproquement. On parviendrait à ce but en prenant pour a la limite des racines (7); mais elle a trop de latitude, le calcul des inéquations donne immédiatement une limite très-rapprochée.

De la résolution des équations algébriques du troisième degré.

10. Il serait trop long de rapporter ici toutes les méthodes générales et particulières qui ont été imaginées pour parvenir à exprimer par des formules algébriques les valeurs des racines que recèlent les équations composées. Aucune de ces méthodes n'a pu franchir le quatrième degré; toutes ont abouti aux mêmes résultats

et aux mêmes inconvéniens. Je me bornerai à exposer ici les deux méthodes les plus simples, qui sont en même temps les plus anciennes, l'une pour le troisième, et l'autre pour le quatrième, quoiqu'elles ne soient pas précisément d'après le même mode de solution.

Pour parvenir à leur solution, il est nécessaire de leur donner une nouvelle forme, dans laquelle le second terme ait disparu, et l'on y parvient toujours dans l'équation générale

$$x^m + A x^{m-1} + \text{, etc.} = 0 \text{ en faisant } x = y - \frac{A}{m},$$

et en substituant dans la proposée cette nouvelle valeur à la place de x. Soit donc proposé de résoudre l'équation du troisième degré dégagée de son second terme

$$x^3 + Bx + C = 0.$$

Je commence par former une équation de la même forme, dont je supposerai les racines connues; je fais $x = a + b$, d'où j'ai

$$x^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3,$$

ou..... $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Puis mettant x pour $(a+b)$, j'ai

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0,$$

équation de la même forme que la proposée. Si je considère que ces deux équations sont les

mêmes, j'aurai

$B = -3ab$, $C = -a^3 - b^3$, d'où je tire

$$b^6 + Cb^3 - \frac{B^3}{27} = 0,$$

équation qui ne contient plus que l'inconnue b, et qui peut se résoudre par la méthode du second degré. J'ai donc

$$a = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C \pm \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}},$$

puis.. $b = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C \mp \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}}$,
d'où la racine $x = a + b$ devient

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C + \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}} \ldots$$
$$+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C - \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}} \quad (1).$$

Je n'ai mis que le signe supérieur devant le radical intérieur $\sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}$, parce que l'on a toujours la même quantité, soit que l'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur de ces radicaux.

Si je divise maintenant l'équation $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$ par la racine $x - a - b = 0$ qui y est contenue, j'aurai pour quotient,

$$x^2 + (a+b)x + a^2 + b^2 - ab = 0,$$

d'où $x = -\left(\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)a - \left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)b$,

et en mettant pour a et b leurs valeurs

$$x = -\left(\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C + \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}} \ldots$$

$$-\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}C - \sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}}.$$

11. Ainsi la résolution du troisième degré m'a donné trois racines différentes. Mais il faut observer maintenant que quand le radical intérieur $\sqrt{\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2}$ est une quantité réelle, la première racine qu'on a obtenue (1) est réelle, et ces deux dernières sont imaginaires, à cause de $\sqrt{-3}$ qui entre dans leur expression. Ainsi dans ce cas, la proposée a une racine réelle et deux imaginaires.

Mais lorsque ce radical est imaginaire, ce qui a lieu toutes les fois que B est négatif, et que l'on a $\tfrac{1}{27}B^3 + \tfrac{1}{4}C^2 < 0$, alors la première valeur de x a une forme imaginaire, ainsi que les deux dernières (2) ; il ne s'ensuit pas que les trois racines de la proposée soient imaginaires ; au contraire, cela est impossible, elle ne peut contenir qu'une paire de racines imaginaires de la forme $x+a+b\sqrt{-1}=0$, $x+a-b\sqrt{-1}=0$, comme on l'a démontré. Il faut donc conclure que les expressions imaginaires contenues dans les valeurs de x se détruisent les unes par les autres, et que les valeurs de x ne sont ima-

ginaires qu'en apparence. On commencera à s'en convaincre, si l'on fait attention que les quantités imaginaires qui sont dans la première valeur de x, sont par paires avec les deux signes contraires, $+$ et $-$, tandis que les quantités réelles sont les mêmes.

Pour obtenir les valeurs réelles des racines dégagées des quantités imaginaires qui leur sont étrangères, il faut réduire en série l'expression des deux grands radicaux; je fais pour cela $\frac{1}{2}C = f$, $\sqrt{\frac{1}{27}B^3 + \frac{1}{4}C^2} = g\sqrt{-1}$. J'aurai pour la première valeur de x (1),

$$x = \begin{cases} -f^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{g\sqrt{-1}}{3f} + \frac{2g^2}{2.3^2f^2} + \frac{2.5g^3\sqrt{-1}}{2.3.3^3f^3} - \frac{2.5.8g^4}{2.3.4.3^4f^4} +, \text{etc.}\right. \\ -f^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{g\sqrt{-1}}{3f} + \frac{2g^2}{2.3^2f^2} - \frac{2.5g^3\sqrt{-1}}{2.3.3^3f^3} - \frac{2.5.8g^4}{2.3.4.3^4f^4} +, \text{etc.}\right. \end{cases}$$

où l'on voit que les quantités imaginaires s'évanouissent; et l'on a enfin pour la première racine,

$$x = -2f^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2g^2}{2.3^2f^2} - \frac{2.5.8g^4}{2.3.4.3^4f^4} + \frac{2.5.8.11.14g^6}{2.3.4.5.6.3^6f^6} -, \text{etc.}\right.$$

Si l'on réduit en séries également les deux autres valeurs de x (2), et si l'on observe que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{3}$, toutes les quantités imaginaires se détruiront, et l'on aura

$$x = \begin{cases} f^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2g^2}{2.3^2f^2} - \frac{2.5.8g^4}{2.3.4.3^4f^4} + \frac{2.5.8.11.14g^6}{2.3.4.5.6.3^6f^6} -, \text{etc.}\right. \\ -\frac{g}{3f^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2.5g^2}{2.3.3^2f^2} + \frac{2.5.8.11g^4}{2.3.4.5.3^4f^4} - \frac{2.5.8.11.14.17g^6}{2.3.4.5.6.7.3^6f^6} +, \text{etc.}\right. \end{cases}$$

La forme imaginaire sous laquelle on obtient les valeurs des racines, quand elles sont toutes réelles, est remarquable. On l'appelle *le cas irréductible.* Le calcul des inéquations, en donnant les élémens décomposés de ces fonctions imaginaires, fera voir le principe d'où elles naissent. Je passe aux équations du quatrième degré.

De la résolution des équations du quatrième degré.

12. Soit l'équation générale du quatrième degré dégagée de son second terme

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

J'imagine cette équation formée de deux autres équations du second degré

$$(x^2 + Px + Q)\ (x^2 + P'x + Q') = 0.$$

Leur produit donne la nouvelle équation

$$\begin{array}{lllll} x^4 + Px^3 & + Qx^2 & + P'Qx & + QQ' = 0, \\ \quad\ + P' & + PP' & + PQ', & \\ & + Q', & & \end{array}$$

qui, étant égale à la proposée, donne les équations auxiliaires,

$$\left.\begin{array}{l} P + P' = 0 \\ Q + PP' + Q' = B \end{array}\right\} \text{d'où } Q + Q' = B + P^2 \quad \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} Q = \frac{B + P^2}{2} + \frac{C}{2A}.$$

$$\left.\begin{array}{l} PQ' + P'Q = C \\ QQ' \ldots\ldots = D \end{array}\right\} \text{d'où } QQ - Q' = \frac{C}{P} \quad Q' = \frac{B + P^2}{2} - \frac{C}{2A}.$$

En substituant les valeurs de Q et Q′ dans la dernière équation auxiliaire, on arrive à l'équation finale

$$P^6+2BP^4+(B^2-4D)P^2-C^2=0,$$

équation du sixième degré, mais qui peut se résoudre par la méthode du troisième ; elle est par conséquent embarrassée du cas irréductible quand toutes les racines sont réelles. On appelle cette équation *la réduite*. La valeur de P étant connue, il n'est pas difficile de déterminer les valeurs des racines de la proposée. Les deux facteurs indéterminés $x^2+Px+Q=0$ et $x^2+P'x+Q'=0$ donnent les formules,

pour le 1er... $x=-\frac{1}{2}P\pm\sqrt{-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}B+\frac{C}{2P}}$;

pour le 2me... $x=+\frac{1}{2}P\pm\sqrt{-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}B-\frac{C}{2P}}$,

dans lesquelles il suffira de substituer les valeurs de P pour connaître celles de x.

Il semblerait de cette solution que x devrait avoir vingt-quatre valeurs différentes ; car la réduite étant du sixième degré, peut donner six valeurs différentes de P pour chacune des quatre valeurs de x : mais on peut remarquer d'abord que dans la réduite P n'a que trois valeurs différentes qui sont prises chacune avec le double signe $\pm$. On peut voir d'après cela,

qu'en faisant P négatif dans le premier des deux facteurs, on obtient le second et réciproquement ; les vingt-quatre valeurs de x se réduisent donc d'abord à douze.

Je ne chercherai pas à faire voir comment les différentes valeurs de P ne donnent jamais pour x que les quatre valeurs de l'équation, ni comment on peut reconnaître si les racines sont réelles ou imaginaires. Ces discussions me meneraient au-delà du but que je me propose.

13. Je ne dirai rien de la résolution des équations numériques ; elle ne présente que des méthodes de tâtonnemens circonscrits par des limites vagues, qui, dans un grand nombre de cas, deviennent incertaines et insuffisantes. Qu'on lise le Traité de la résolution des Equations numériques de Lagrange, on verra que la résolution des équations qui passent le quatrième degré, est absolument impraticable dans un grand nombre de cas par la longueur excessive des calculs qu'elle exige.

14. D'ailleurs ce mode de solution ne peut convenir qu'aux équations qui ne contiennent plus qu'une seule inconnue. Si l'on a deux équations déjà composées à deux inconnues, il faudra avoir recours à la méthode longue et fastidieuse de l'élimination, qui conduira à une équation finale, dont le degré pourra

être égal au produit des degrés des deux équations. Ainsi je suppose qu'on ait à trouver les valeurs des inconnues x et y, d'après les deux équations

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = 0$$

dans lesquelles les coëfficiens A, B, C, etc. sont des fonctions de y, y^2 et y^3, on aboutira à une équation finale du neuvième degré; mais déjà la résolution des équations du cinquième degré est inabordable.

Ces deux équations ne peuvent pas plus se résoudre par les formules algébriques, connues des équations du troisième degré, parce que leurs expressions surcomposées sont embarrassées de fonctions imaginaires.

Si l'on avait, pour la résolution des équations du troisième degré et au-delà, des formules algébriques, comme celle que l'on a pour la résolution des équations du deuxième degré, il serait facile de résoudre les équations composantes à deux inconnues séparément, comme on peut le faire pour les équations du deuxième degré; en considérant une des variables comme une quantité connue, on obtiendrait, à l'aide de ces formules, le cours des valeurs correlatives des deux variables dans chacune des deux équations composantes; et

les valeurs correlatives, qui se trouveraient les mêmes dans les deux équations, détermineraient à la fois les valeurs de x et de y.

C'est-à-dire, qu'on parviendrait aisément à construire la courbe de chacune des deux équations composantes; et leurs points d'intersection détermineraient les valeurs de x et de y, communes aux deux équations. C'est ce que l'on fait dans le calcul des inéquations.

En considérant l'imperfection des méthodes connues de solution des équations, tant algébriques que numériques; leur impossibilité de s'étendre au-delà du quatrième degré, et leur inutilité pour la résolution des équations à plusieurs inconnues: on peut dire que le grand problême de la résolution des équations, ou, plus généralement, que le mode général de la décomposition algébrique est encore à trouver. On verra comment on y peut parvenir par le calcul des inéquations.

CHAPITRE II.

Principes et règles du calcul des inéquations: du double point de vue sous lequel il faut considérer les quantités négatives relativement au rapport d'inéquation.

15. On a défini plus haut le calcul des inéquations, le mode de la décomposition algé-

brique ; mais cette définition, en n'indiquant que le résultat général de ce calcul, ne peut rien apprendre sur sa nature : ce n'est que par son application qu'on peut en acquérir une idée exacte.

Il suffit de dire ici que par le calcul des inéquations on aboutit à deux formules algébriques, en fonctions des coëfficiens de la proposée de la forme $x < p, x > q$, qui ne comprennent dans leur latitude qu'une seule racine de l'équation : par les principes de ce même calcul, on fait disparaître cette latitude, et l'on parvient à la valeur exacte de la racine si elle est commensurable, ou au degré d'approximation que l'on desire, si elle est incommensurable.

La théorie, sur laquelle s'appuient ces résultats, exige un certain développement. C'est en analysant le mode de solution des équations du troisième degré, que j'en développerai les principes et les règles. Il sera nécessaire d'entrer dans des détails inutiles à la résolution pratique des équations, mais importantes pour l'exposition de la théorie. La résolution des équations du quatrième et du cinquième degré servira à faire connaître la généralité de la méthode, et à faire conclure

la formule générale pour la résolution des équations d'un degré quelconque.

Dans le calcul des inéquations les signes $>$ ou $<$ tiennent la place du signe $=$: ce n'est que par le dernier résultat de l'opération qu'on aboutit à ce dernier signe. Il en résulte une difficulté relativement aux quantités négatives qu'il est nécessaire de résoudre. Que signifient ces expressions $x < -a$, $x > -b$, auxquelles on aboutit souvent dans le calcul des inéquations ? cela veut-il dire que l'inconnue est plus petite que la quantité a, pour le premier cas, et plus grande que la quantité b, dans le deuxième? Cette question tient à celle-ci ; peut-on dire $-3 < -2$, ou $-3 > -2$?

16. Je considère l'inéquation $6-3 < 6-2$: il est incontestable que si je retranche la même quantité dans les deux membres de cette inéquation, le premier devra continuer d'être plus grand que le deuxième, j'aurai donc $-3 < -2$: mais, d'un autre côté, si j'élève au quarré les deux membres de cette inéquation, j'aurai $9 < 4$, ce qui est absurde. On pourrait conclure de là que les opérations du calcul des inéquations doivent conduire à des résultats contradictoires ; cette difficulté, ainsi que d'autres qui se rencontrent dans les rapports d'inéquation des quantités négatives, trouveront leur

solution dans le double point de vue sous lequel il faut les considérer ; on en conclura les règles du calcul des inéquations relativement à ces quantités.

Une quantité quelconque, considérée toute seule, n'est ni négative ni positive ; elle ne peut être appelée *négative* que par relation à une autre, qui, par rapport à cette dernière, s'appelle alors *positive*. La relation de négatif à positif naît de la soustraction. En algèbre on indique l'opération de la soustraction à faire par le signe — ; ainsi l'expression algébrique $a - b$ se traduit en français par : *la quantité b doit être retranchée de la quantité a ;* jusques-là point de difficulté.

17. Mais que signifie cette expression $x = -a$, que donne souvent le résultat d'une équation simple ? Il est nécessaire de considérer ici cette quantité négative sous deux points de vue différens. D'abord, si l'on veut considérer le signe — d'après le principe de sa création, il faudra conclure qu'il exprime une soustraction à faire ; il faudra donc nécessairement imaginer une quantité qui n'a pas été exprimée dans le problême, et de laquelle on retranche a, autrement cette soustraction serait absurde, en désignant cette quantité qu'on peut appeler *ineffective* par v ; il faudra considérer que

l'équation $x = -a$ est équivalente à celle-ci $x = \nu - a$. ν désigne une quantité quelconque, dont la nature est de n'être pas exprimée dans le calcul.

Pour faire mieux concevoir ceci, je considère l'équation $x = (b - a)$, le signe $=$ ne tombe ni sur b ni sur a, mais sur là différence de ces deux quantités. Cette expression annonce qu'il faut que je commence par soustraire a de b, de sorte que l'action du signe $-$ précède celle du signe $=$; et en général l'action d'un signe sur un polynome quelconque, ne tombe que sur le dernier résultat de toutes les opérations indiquées dans ce polynome, quelle que soit la valeur de chacune des quantités qu'il renferme ; telle est la nature de l'algèbre.

Si $b = o$, l'équation devient $x = (o - a)$; en continuant toujours la même considération, le signe $=$ gouverne encore le résultat des opérations à faire dans le polynome $(o - a)$; il gouverne donc le reste d'une soustraction. La conséquence nécessaire qui en résulte, c'est que l'équation équivaut à $x = (\nu - a)$. Cette conséquence peut être regardée comme une première interprétation.

Des quantités métanégatives et pronégatives.

18. Ce n'est pas ainsi qu'on interprète les résultats négatifs, que donnent les équations, et je suis loin de prétendre qu'il faille se borner à les interpréter ainsi : car sous ce premier point de vue, la valeur de l'inconnue n'exprime qu'une quantité ineffective. Quand on obtient pour x une valeur négative, on en conclut tout simplement qu'il faut prendre cette quantité dans un sens opposé à celui qu'on lui attribuait dans les données du problême.

Voici en quoi cette deuxième manière d'interpréter la valeur négative diffère de la première : on fait tomber directement l'action du signe = sur la quantité a ; et ce n'est qu'après qu'on considère et qu'on interprète le signe — qui l'affecte. De sorte que l'égalité entre x et a est prononcée antérieurement et indépendamment du signe —. Dans la première, au contraire, on suit l'ordre naturel dans l'action successive des signes algébriques, ce n'est que conséquemment à l'action du signe — qu'on prononce l'égalité entre x et le deuxième nombre de l'équation ; sa valeur est prise dans le sens qu'on lui attribuait dans la question à résoudre ; mais cette valeur n'est

que le reste de la soustraction $v - a$; c'est-à-dire, qu'elle est ineffective. J'exprimerai l'équation négative, considérée sous ce dernier point de vue, de cette manière $x = (-a)$, et j'appellerai *pronégative* la quantité $(-a)$; c'est-à-dire, *négative avant*. Sous l'autre point de vue je l'exprimerai par $x = -(a)$, et j'appellerai la quantité $-(a)$ *métanégative;* c'est-à-dire, *négative après*.

Pour rendre sensible cette distinction par un exemple, je l'applique au problème suivant:

PROBLÈME.

Quatre joueurs se sont mis au jeu ; le gain du premier et le $\frac{1}{4}$ du gain de celui des trois autres $= 25$; *le gain du deuxième et le $\frac{1}{3}$ du gain des trois autres* $= 14$; *le gain du troisième et le $\frac{1}{2}$ du gain des trois autres* $= 8$; *le gain du quatrième et la moitié du gain des trois autres* $= 11$. *On demande quel est le gain de chacun ?*

En appelant x, y, z, u, ces quatre inconnues, on trouvera par les règles connues de l'algèbre,

$$\left.\begin{aligned} x &= 24 \\ y &= 12 \\ z &= -2 \\ u &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Si je considère d'abord les deux dernières valeurs comme pronégatives, il sera nécessaire que je les ramène à cette expression, $z = v - 2$

et $u = v - 3$. La quantité ineffective v pourra être considérée exprimant la mise de chaque joueur. Il faudra que je traduise ainsi les résultats de l'équation : le premier a sa mise $+24$; le deuxième a sa mise $+12$; le troisième a sa mise -2; le quatrième a sa mise -6.

Si je prononce, au contraire, l'égalité entre x, y, z, u et les nombres qui sont dans le deuxième membre de chaque équation, avant d'avoir égard à leur signe, je traduirai ainsi la solution : $x = 24$ *unités de gain*, $y = 12$ *unités de gain*, $z = 2$ *unités de perte*, $u = 6$ *unités de perte*.

On peut voir que dans les équations pronégatives $x = (-a)$, le signe $-$ est une espèce de *proposition* algébrique qui indique une opération à faire ; au lieu que dans les équations métanégatives, comme dans ce dernier point de vue, le signe $-$ est une espèce d'*adjectif* algébrique qui caractérise la quantité qu'il affecte. De sorte que la quantité négative n'est plus une quantité à soustraire, c'est une quantité qui a la qualité d'être prise dans un sens contraire de celle qui est positive.

C'est de cette dernière manière qu'on considère les quantités négatives ; mais cette considération est une véritable interprétation. C'est une opération que l'on passe en quelque

sorte sous silence, mais qu'on ne fait pas moins; cette distinction serait inutile, et même futile, si l'on n'avait égard qu'aux équations; c'est le rapport d'inéquation qui la rend nécessaire.

19. J'appelle cette opération *effectuation*, parce qu'on applique le signe d'égalité ou d'inéquation à une valeur effective. Alors il faut considérer qu'il n'y a ni le signe + ni le signe —, interposé entre le signe = et la quantité; ce n'est que le rapport d'égalité entre x et cette quantité que l'on considère : de sorte que dans ce premier temps elle n'est ni positive ni négative, et ce n'est qu'après qu'on considère cette relation.

On va reconnaître la nécessité de la distinction des quantités pronégatives et métanégatives dans son application aux rapports d'inéquation. Je reprends l'inéquation $-3<-2$, (16) : elle ne peut avoir pour origine que celle-ci $n-3<n-2$; dans cette dernière, on compare la différence de $n-3$ à celle de $n-2$; le signe d'inéquation ne tombe directement ni sur le nombre 3 ni sur le nombre 2, mais sur les deux quantités qui expriment chaque différence; en supprimant n de part et d'autre, si je ne fais aucune effectuation, le signe — affectera les deux nombres 3 et 2 avant le signe

d'inéquation : je ne les comparerai encore qu'en conséquence du signe qui les précède ; j'aurai donc l'inéquation pronégative $(-3) < (-2)$, qui équivaut à $1+3 < 1-2$, et c'est sous ce point de vue seulement qu'elle est vraie.

Maintenant si j'effectue cette inéquation, en faisant tomber son signe directement sur les deux quantités, je vois immédiatement que j'aurai l'inéquation métanégative $-(3) > -(2)$, qui, étant traduite littéralement, signifie d'abord 3 *est plus grand que* 2 ; *ensuite ces deux nombres doivent être pris dans un sens ou dans une direction négative.* Comme la quantité est commune aux deux membres, on ne la considère plus dans l'inéquation, et l'on a tout simplement $3 > 2$.

30. En général, si j'aboutis à l'inéquation $-a < -b$, j'ai d'abord $-(a) > -(b)$, puis, en faisant disparaître le signe négatif de part et d'autre, j'ai $a > b$; mais si le premier membre est une inconnue, ou si j'aboutis à l'inéquation $x < -b$; j'ai d'abord par l'effectuation $x > -(b)$, que j'exprime ainsi :

$$x = - > b, \text{ ou simplement } x - > b.$$

C'est ainsi que j'exprimerai les quasi-valeurs négatives effectuées ou métanégatives, pour

désigner que le signe — n'est plus intermédiaire entre le signe d'inéquation et la quantité qu'il gouverne. De ceci on peut conclure cette première règle :

PREMIÈRE RÈGLE.

21. *Toute inéquation dont les deux termes sont négatifs, change par son effectuation de signe d'inéquation.*

On peut observer que l'inéquation $-a<-b$ devient $a>b$ par la simple règle de la transposition ; mais il est bon de remarquer que dans les équations, on peut changer les signes dans les deux membres sans détruire l'égalité ; au lieu qu'ici, quand on fait cette opération, il faut également changer le signe d'inéquation. De là suit cette règle.

DEUXIÈME RÈGLE.

22. *Le changement des signes additionnels dans les deux membres d'une inéquation, ne peut avoir lieu qu'avec le changement du signe d'inéquation.*

J'appelle additionnels les signes + et —. Ainsi l'inéquation $b-c<p-q$ devient en changeant les signes additionnels $c-b>q-p$.

Si je divise l'inéquation $-a<-b$ par $-a$, j'aurai d'abord $1<\frac{-b}{-a}$, d'où il faudra con-

clure $1 > \frac{b}{a}$, en changeant le signe d'inéquation, et non pas $1 < \frac{b}{a}$: autrement, il en résulterait l'inéquation $a < b$, dont la direction serait fausse. De là suit la troisième règle.

TROISIÈME RÈGLE.

23. *Si l'on change les signes additionnels du numérateur et du dénominateur d'un des membres d'une inéquation, il faudra changer également le signe d'inéquation.*

Si j'ai à multiplier les deux inéquations $-a > -b$ et $-c > -d$ l'une par l'autre : en effectuant simplement la multiplication, j'aurai l'inéquation contradictoire $ac > bd$. Il faut donc les effectuer avant de les multiplier; on aura d'abord $-(a) < -(b)$, $-(c) < -(d)$, ou simplement $a < b$, $c < d$, puis $ac < bd$. Par la même raison, si l'on a à élever au quarré l'inéquation $-a > -b$, il faudra l'effectuer, et l'on aura $a^2 < b^2$. De là suit la quatrième règle.

QUATRIÈME RÈGLE.

24. ***Pour élever à une puissance paire une inéquation dont les deux membres sont négatifs, il faut auparavant l'effectuer en changeant son signe d'inéquation.***

On pourrait objecter contre cette dernière règle, qu'elle peut conduire à des inéquations dont la direction serait fausse, lorsque les quantités que l'on multiplie ou qu'on élève au quarré sont intrinséquement négatives : par exemple, si l'on avait l'inéquation $a<b$, et que ces deux quantités fussent intrinséquement négatives, elles seraient comme l'inéquation $-3<-2$; mais en les élevant au quarré, on aurait $a^2<b^2$, qui équivaudrait à l'inéquation $9<4$.

Mais il faut observer que le calcul des inéquations ne surcompose point. Jamais il n'élève l'inconnue ou les variables x, y, z, à un degré supérieur à celui qu'elles ont dans l'équation proposée, comme on fait dans les méthodes connues de l'algèbre : toutes les opérations de ce calcul n'appartiennent qu'à la décomposition; et cette règle ne sert qu'à éclairer la théorie d'après laquelle elle s'opère.

25. Je suppose maintenant que j'aye à extraire la racine quarrée de l'inéquation $9>4$: comme les deux membres peuvent être supposés positifs ou négatifs à leur racine, il faudra que l'on ait, d'après la deuxième règle,

$$3>2 \text{ et } (-3)<(-2).$$

On peut remarquer qu'il n'y a changement de

signe dans la deuxième de ces deux inéquations, que parce que les quantités sont pronégatives. En général, si je veux extraire la racine de $p^2 < q^2$, j'aurai

$$p < q \text{ et } (-p) > (-q).$$

Donc, si j'aboutis à une inéquation de cette forme $x^2 < a$, il faudra que j'aye

$$x < \sqrt{a} \text{ et } x > (-\sqrt{a}).$$

La deuxième de ces deux quasi-valeurs étant pronégative, équivaut à $x = - < \sqrt{a}$. Ces deux quasi-valeurs répondent aux deux valeurs $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, que donnerait l'équation $x^2 = a$: les deux signes d'inéquation remplacent le signe $=$.

Si je suppose maintenant que x soit $= y - b$, j'aurai

$$(y-b)^2 < a, \text{ d'où } \begin{matrix} y-b < \sqrt{a} \\ y-b > (-\sqrt{a}) \end{matrix} \text{ puis } \begin{matrix} y < b + \sqrt{a}. \\ y > b - \sqrt{a}. \end{matrix}$$

Si j'effectue la deuxième de ces quasi-valeurs avant la transposition, j'aurai $y - b = - < \sqrt{a}$, puis $y = b - < \sqrt{a}$, d'où l'on conclut de même $y > b - \sqrt{a}$.

Cela posé, si j'ai à résoudre l'équation

$$x^2 - Ax + B > 0,$$

j'aurai d'abord $(x - \frac{1}{2}A)^2 > \frac{1}{4}A^2 - B$, d'où

j'ai les deux quasi-valeurs $\begin{cases} x > \frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B.} \\ x < \frac{1}{2}A - \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B.} \end{cases}$

De là résulte cette règle :

CINQUIÈME RÈGLE.

26. *Le double signe additionnel* $\pm$ *de la résolution des inéquations du second degré, est toujours accompagné du double signe d'inéquation.*

Cette règle est en quelque sorte la base du calcul des inéquations, parce qu'on ramène la résolution des équations de tous les degrés à une seule inconnue ou à plusieurs variables à la résolution des équations du second degré.

27. On peut maintenant rendre raison du résultat contradictoire que l'on obtient en élevant immédiatement au quarré les deux termes de l'inéquation $(-3) < (-2)$, qui est $9 < 4$. Cette contradiction vient de ce que les deux quantités dont on compare les quarrés dans cette dernière inéquation, ne sont pas les mêmes que celle qu'on compare dans l'inéquation pronégative $(-3) < (-2)$. Celle-ci ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle est considérée comme $\nu - 3 < \nu - 2$: alors la comparaison tombe sur les différences de $\nu - 3$ et de $\nu - 2$, qui sont deux quantités ineffec-

tives : au lieu que dans l'inéquation contradictoire $9 > 4$, elle tombe sur les quarrés des deux nombres effectifs 3 et 2.

28. On distingue deux espèces d'inéquations : 1°. Celles qui renferment l'inconnue, et qui servent à déterminer sa quasi-valeur ; 2°. celles qui ne renferment que des quantités toutes connues, et qui sert à exprimer la direction d'inéquation qui résulte de la relation des coëfficiens de l'équation, comme par exemple l'inéquation $A^2 - 4B > 0$ exprime la direction de la relation des coëfficiens de l'équation générale du second degré, $x^2 + Ax + B = 0$. Ces espèces d'inéquations correspondent aux équations identiques ou aux équations de condition qui se présentent dans l'analyse.

Ces espèces d'inéquations se présentent assez souvent sous cette forme $a > -b$, comme $1 > (-2)$; on peut les appeler inéquations *positivo-négatives*. Elles ne peuvent pas s'effectuer comme quand les deux membres sont également négatifs $-1 > -2$. Cette dernière devient par l'effectuation $1 < 2$. Mais il n'en est pas de même de $1 > (-2)$, la quantité qui est dans le premier membre se compare dans le second avec une quantité ineffective, qui est le reste de $r - 2$. En voulant l'effectuer, on aurait encore une inéquation positivo-néga-

tive $-1 < 2$; les quantités négatives dans ces sortes d'inéquations restent donc pronégatives, à moins que par la nature du rapport que l'on considère, on doive considérer le signe négatif comme étranger à ce rapport.

29. Pour prouver que l'on ne peut pas avoir l'inéquation $1 > -2$, on fait cette proportion, $1 : -2 :: -2 : 4$; et l'on fait ce raisonnement : si le premier antécédent est plus grand que son conséquent -2 dans la première raison, il faudra que le second antécédent -2 soit aussi plus grand que son conséquent ; or, la quantité positive 4 donne un second rapport qui serait en contradiction avec le premier, d'où l'on conclut que ces espèces d'inéquations ne peuvent pas avoir lieu, et ne sont, selon l'expression de Carnot, que des *symboles algébriques.*

Cette difficulté et d'autres de cette espèce proviennent de ce que dans les inéquations positivo-négatives, on ne distingue pas les cas où la quantité est considérée conséquemment à son signe négatif, et par conséquent comme pronégative, d'avec les cas où le signe négatif est étranger au rapport d'inéquation que l'on considère, et où par conséquent la quantité est métanégative. Pour apprendre à les distinguer, il est nécessaire d'analyser la nature du

rapport d'inéquation, et de déterminer comment les différens signes algébriques gouvernent les quantités négatives.

30. Les différens rapports sous lesquels on considère les quantités naissent du principe de leur formation, et en remontant jusques-là, j'observe que la formation des nombres, et en général des quantités, se ramène à ces deux modes de composition, l'*addition* et la *multiplication ;* et leur décomposition aux deux modes correspondans, la *soustraction* et la *division* ou la *démultiplication*. L'addition et la soustraction appartiennent généralement au mode *additionnel*. La multiplication et la démultiplication au mode *multiple*. Ces deux modes sont en quelque sorte les deux pivots sur lesquels roulent toutes les opérations des mathématiques.

C'est d'après ces deux modes généraux que se déterminent les rapports des quantités. De là le rapport que j'appelle *additionnel* et le rapport que j'appelle *multiple*, comme le désigne leur expression algébrique, qui, pour le premier, est $a:a\pm d$, et pour le second, $a:aq$. Cette dénomination exprime la nature de ces rapports, ou le principe d'où ils émanent. De là on a les *proportions additionnelles* et les *proportions multiples*. (Le mot proportion dé-

signe égalité de rapport.) De là on a encore les *progressions additionnelles* et les *progressions multiples.*

31. Cela posé, je considère les deux progressions décroissantes, la première additionnelle, et la deuxième multiple.

4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3, —4, etc.
16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc.

Tous les termes de la première suite jusqu'à 0, sont des restes de soustractions effectuées. Si l'on considère que les termes qui suivent 0, continuent à décroître d'après le même mode, ou si l'on considère que la progression additionnelle continue après 0, il faut nécessairement que l'on suppose une quantité ineffective de laquelle on continue à soustraire, autrement la continuation de la progression serait absurde. Par conséquent les termes qui suivent zéro, sont pronégatifs; leur valeur est ineffective, et ils équivalent à $\nu-1$; $\nu-2$, $\nu-3$, etc.

Il est clair maintenant que chaque terme de ces deux suites est toujours plus grand que celui qui le suit; on a donc également

$$4>3>2>1>0>(-1)>(-2)>(-3)>(-4), \text{etc.}$$
$$16>8>4>2>1>\tfrac{1}{2}>\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{8}>\tfrac{1}{16}, \text{etc.}$$

Mais le rapport d'inéquation des termes de la

première suite n'est pas le même que celui des termes de la seconde, quoiqu'il soit exprimé en algèbre par le même signe $>$, et en français par le mot *plus grand.* Le premier appartient au mode additionnel, et le second, au mode multiple.

Des rapports d'inéquation additionnels et multiples.

32. Il faut distinguer donc deux rapports d'inéquation; savoir: 1°. *le rapport d'inéquation additionnel; 2°. le rapport d'inéquation multiple.* Ainsi l'inéquation additionnelle $a>b$ équivaut à $a=b+z$; l'inéquation multiple $p>q$ équivaut à $p=q\times z$. Dans le calcul des inéquations, c'est toujours le rapport additionnel que l'on considère. Ainsi l'inéquation $x<a$ équivaut à $x=a-z$, z est une inconnue qu'on n'exprime pas dans le calcul des inéquations, et qu'on vient néanmoins à bout de faire disparaître, et l'on a alors la valeur de la racine.

Cette différence d'inéquation s'exprime dans le langage quand on fait mention de la valeur de l'inéquation. Ainsi l'on dit 12 plus grand que 3, sans spécifier la nature de ce rapport; mais l'on dit 12 *plus grand que* 3 *de neuf*, pour exprimer le rapport d'inéquation additionnel,

et 12 *quatre fois plus grand que* 3, pour exprimer le rapport d'inéquation multiple.

Maintenant si je compare 1 avec — 2, et que je considère en même temps que le signe — gouverne la quantité 2 avant le signe d'inéquation, il s'ensuivra que je comparerai la première quantité avec la deuxième, en vertu d'une soustraction que le signe — indique; il s'ensuivra que l'inéquation 1 > (— 2) est additionnelle: mais si je veux la considérer dans le rapport multiple, ce nouveau rapport étant étranger au signe soustractif — qui précède la quantité – 2, il faudra que je la considère comme métanégative, et j'aurai 1 < — (2). Dans ce cas, l'inéquation étant en conséquence du rapport multiple, son signe doit gouverner immédiatement les quantités 1 et 2, et ce n'est qu'après qu'on doit considérer le signe — de la quantité 2.

Dans le rapport d'inéquation additionnel 1 est plus grand que (— 2) de trois. Dans le rapport d'inéquation multiple 1 est plus petit que — (2), il n'en est que la moitié.

33. Je viens maintenant à la proportion ci-dessus (45) 1 : — 2 :: — 2 : 4, d'après laquelle on prétend prouver que l'on n'a pas 1 > — 2. Ou bien cette inéquation appartient au mode additionnel, ou bien elle appartient au mode

multiple : dans le premier cas, le rapport de 1 à — 2 étant additionnel, ne peut se comparer pour faire une proportion qu'à un autre rapport additionnel qui lui soit égal. J'aurai donc la proportion additionnelle 1.(—2:(—2).(—5). Dans ce cas, j'ai 1>(—2) comme (—2)>(—5); ainsi il n'y a pas de difficulté.

Si l'inéquation 1 > — 2 appartient au mode multiple, le second membre sera métanégatif, et l'on aura alors 1 <—(2) comme —(2)<4. Le signe — ne gouverne alors la quantité 2 qu'après la considération du rapport d'inéquation.

34. Pour rendre sensible ce que je viens de dire par des exemples, je l'applique au problême des joueurs ci-dessus (37). Si je compare les gains et les pertes sous le rapport multiple, je dirai : 1°. *Le gain du premier* =(24) *est plus grand que le gain du second* =(12); 2°. *la perte du troisième* = —(2) *est plus petite que la perte du quatrième* =—(6); 3°. *le gain du premier est plus grand que la perte du dernier;* 4°. *le gain du second est double de la perte du dernier, etc.*

Dans toutes ces expressions, les mots *plus grand*, *plus petit*, ne tombent que sur des nombres abstraits, indépendamment de la relation de perte au gain, ou indépendamment

des signes + ou — qui expriment cette relation, et qui ne se considèrent qu'après le rapport d'inéquation.

Mais si je veux que le rapport d'inéquation soit conséquent à la relation de la perte au gain, ou aux signes additionnels + et —, il faudra que j'employe d'autres expressions. Je dirai, par exemple, *ce qui reste au troisième joueur* (-2) *est plus grand que ce qui reste au quatrième* $=(-6)$ *ou* $(-2)>(-6)$, et ainsi des autres.

Quand je compare alors le plus grand gain avec la plus grande perte, sous ce rapport d'inéquation, j'ai l'inéquation additionnelle $24>(-6)$, qui équivaut à l'équation $24=-6+z$. Si je considère la même inéquation dans le mode multiple, le signe $>$ tombant alors directement sur le nombre 6, l'inéquation $24>-(6)$ signifierait que 24 est plus grand que 6, un certain nombre de fois; elle équivaudrait à l'inéquation $24=-(6)\times z$. Dans ce cas-ci z serait $=4$. On voit évidemment que ces deux rapports ne sont pas les mêmes, et qu'ils ne doivent pas être confondus : et l'on voit, en même temps, que c'est sous ce dernier rapport qu'on doit considérer l'inéquation $1>-2$ dans la proportion cidessus.

Pareillement, on démontre en géométrie que la perpendiculaire, abaissée sur le diamètre du cercle, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens. Ce théorême s'applique indifféremment aux deux perpendiculaires, menées d'un même point du diamètre à la circonférence ; ou à chacune des deux ordonnées, appartenant au même point : cependant l'une de ces coordonnées est négative par rapport à l'autre : et, par rapport à cette dernière, on peut faire une proportion qui a la même forme que celle de $1 : -2 :: -2 : 4$; mais dans la synthèse on ne considère point la qualité négative dans ce rapport multiple.

Par le résultat de l'analyse, on aboutit à l'équation $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, la deuxième valeur est d'abord immédiatement pronégative ; mais si l'on veut la traduire en une proportion multiple, on l'effectue, en considérant sa propriété d'être négative, comme une qualité dont on fait abstraction pour le rapport que l'on veut considérer ; et on fait alors la proportion comme on la fait quand on commence par la synthèse.

Il faut considérer que les résultats de l'analyse donnent généralement tous les points de vue sous lesquels on peut considérer l'inconnue ; mais dans la synthèse on ne consi-

dère qu'un seul rapport à la fois. Dans cet exemple, quand on considère la double ordonnée au cercle, sous le point de vue qu'elle est moyenne proportionnelle entre les deux segmens faits sur le diamètre, on n'a pas égard si elle est prise positivement ou négativement ; et quand on s'occupe de ce dernier point de vue, on ne s'occupe pas de l'autre.

En général, dans la synthèse on ne considère que successivement les différentes relations, dont les quantités sont susceptibles ; et les résultats de l'analyse présentent, à la fois, ces différentes relations.

35. Je reprends la série additionnelle cidessus (31).

$$\ldots 4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4 \text{ etc.}$$

qui ne continue de décroître au-delà de zéro, que parce que les termes qui suivent sont pronégatifs, et que le signe d'inéquation tombe sur le reste ineffectif d'une soustraction indiquée.

Si l'on veut, maintenant, que la série ne soit composée que de termes effectifs, il faudra nécessairement qu'elle s'arrête à zéro ; les termes qui suivent seront métanégatifs ; leur signe d'inéquation changera d'après la première règle : il en résultera une autre série

qui sera la même que la première, à l'exception qu'elle sera croissante, en faisant abstraction du signe —; ainsi elle se partagera en suites opposées,

$$\ldots 4>3>2>1>0<-(1)<-(2)<-(3)<-(4) \text{ etc.}$$

ou bien (20)... $0-<1-<2-<3-<4$ etc.

36. Supposons, maintenant, que l'on divise une quantité quelconque, *a* ou l'unité par la série additionnelle ci-dessus, prolongée au-delà de zéro; en la considérant toujours décroissante au-delà de ce terme, les quotiens iront donc toujours en croissant: on aura donc

$$\ldots\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}<\frac{1}{0}<\frac{1}{(-1)}<\frac{1}{(-2)}<\frac{1}{(-3)} \text{ etc.}$$

Dans cette série, la première partie jusqu'à $\frac{1}{0}$ ne fait pas de difficulté; mais en continuant la série au-delà, il en résulte une absurdité; car en comparant $\frac{1}{0}$ avec $\frac{1}{(-2)}$, on a d'une part $\frac{1}{0}<\frac{1}{(-2)}$; ce qui s'accorde avec ce que l'on a dit ci-dessus; car on tire de là $-2<1$, $6-2<6+1$.

Mais si au lieu de $\frac{1}{(-2)}$ on prend $\frac{-1}{2}$ expression qui se confond avec la première dans

le stile algébrique, j'aurai $\frac{1}{0} < -\frac{1}{2}$: ce qui est absurde et contradictoire avec $-2 < 1$.

Pour résoudre cette difficulté, il faut considérer que la première partie, composée de quantités positives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ etc., est une série qui appartient au système multiple; c'est une suite de quotiens que l'on compare et non une suite de différence ; or une série multiple ne passe jamais de positif à négatif : c'est l'opération soustractive qui appartient au mode additionnel qui fait passer de l'une à l'autre. Je prends, pour exemple, la série la plus simple, appartenant au mode multiple,

$$n \ldots 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8}\ \tfrac{1}{16} \text{ etc.}$$

Elle a pour limite dans la direction décroissante o, à laquelle elle ne peut pas parvenir, et pour limite opposée $\frac{1}{0}$. Toutes les séries multiples ne diffèrent de celle-là que parce que les numérateurs et les dénominateurs suivent des lois différentes : d'où résulte une suite de quotiens qui forment, par leur nature, une série dans l'ordre multiple ; et leur rapport d'inéquation n'appartient également qu'à l'ordre multiple.

Par conséquent, la série ci-dessus se termine à la limite $\frac{1}{0}$, et les termes qui suivent appartiennent à une autre série prise dans un sens

opposé ; c'est-à-dire, que la série des dénominateurs est métanégative, et, par conséquent, en considérant les termes qui sont au-delà de $\frac{1}{0}$ sous le rapport d'inéquation, ils doivent être considérés comme métanégatifs. Par conséquent, la série ci-dessus se partage en deux, au terme où les dénominateurs commencent à devenir négatifs, et l'on a

$$\ldots \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \overbrace{\underbrace{\frac{1}{0} > -\left(\frac{1}{0}\right)}} > -\left(\frac{1}{1}\right) > -\left(\frac{1}{2}\right) > -\left(\frac{1}{3}\right) \text{ etc.}$$

On peut observer, 1°. que la série ci-dessus ne conservait la même direction d'inéquation, dans son prolongement au-delà du terme $\frac{1}{0}$ que parce qu'elle équivaut à celle-ci.

$$\frac{1}{\nu+2} < \frac{1}{\nu+2} < \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\nu-1} < \frac{1}{\nu-2} < \frac{1}{\nu-3} \text{ etc.}$$

Dans cette considération les termes où se trouve le signe $-$, en supposant $\nu = 0$, ne sont pas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ etc. pris ensuite négativement, dans ce cas l'action du signe de la division ne tombe que sur les différences $\nu - 2$, $\nu - 3$ etc. et non pas sur les nombres 2, 3, etc. Ce n'est que par leur effectuation qu'on fait tomber son action immédiatement sur ces nombres ; ce n'est donc qu'en les rendant métanégatifs. Il faut donc que le signe d'inéquation change, et il en résulte une autre série semblable à la première ; mais qui croît dans un sens opposé.

37. On peut observer en second lieu, que la limite de la première de ces deux séries $\frac{1}{0}$ est immédiatement contiguë à la limite $-(\frac{1}{0})$ de la série suivante qui lui est opposée. On voit alors que les deux extrêmes se touchent, ce qui doit être. Il en est de même des deux tangentes qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite de la tangente de l'angle droit, l'une en-deçà, l'autre au-delà ; la première est un infiniment grand positif, et la seconde, un infiniment grand négatif. L'expression de la tangente étant $\frac{\sin. a}{\cos. a}$, est pour la première $\frac{1}{0}$, et pour la seconde $\frac{1}{-0}$ ou $-\frac{1}{0}$; la tangente effective qui suit immédiatement celle $\frac{1}{0}$, est celle $-(\frac{1}{0})$.

On voit maintenant la solution de la difficulté dont il s'agit : la série devant s'arrêter à la limite $\frac{1}{0}$, on n'a pas $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$, mais l'on a $\frac{1}{0} > -(\frac{1}{1})$, d'où $-(2) > 1$, alors on ne peut plus se servir de l'inéquation $6-2<6+1$ pour prouver le contraire ou $0-2<0+1$; car dans ce dernier cas, le signe d'inéquation ne gouverne pas 2, mais la différence $0-2$; au lieu que dans $-(2)>1$, il tombe directement sur les deux quantités 2 et 1.

Des logarithmes des quantités négatives.

38. La distinction des quantités pronégatives et métanégatives, donne aussi la solution de la difficulté que présentent les logarithmes des quantités négatives.

Le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il a fallu élever un nombre fixe, qu'on appelle *base logarithmique*, pour qu'il en résulte le nombre proposé. Ainsi dans l'équation $c^x = y$, x désigne le logarithme de y; et l'on a également $x = \mathrm{L}y$. L'expression $10^x = y$ est celle des logarithmes des tables, parce qu'on a pris pour base le nombre 10.

Si j'aboutis à une équation quelconque $a^z = b$, pour la soumettre au calcul logarithmique, je considère a comme une base logarithmique particulière à cette équation ; je la ramène à la base générale en faisant $10^x = b$, d'où l'on a $a^z = 10^x$; puis $\mathrm{L}a^z = \mathrm{L}10^x$, d'où $x = z\mathrm{L}a$; puis l'équation $10^x = b$ donne $x = \mathrm{L}b$, d'où $z = \frac{\mathrm{L}b}{\mathrm{L}a}$. Par cette opération, on exprime z ou le logarithme, qui a pour base particulière la quantité a en logarithmes, qui ont pour base la base générale 10.

Ainsi, on ramène par ce moyen toutes les

quantités exponentielles à l'expression $10^x = n$, ou plus généralement $B^x = y$, en appelant B la base quelconque que l'on adopte pour y ramener toutes les autres particulières.

Maintenant que signifie l'expression $x = L - a$? elle naît de l'équation $B^x = -a$. Or, si l'on considère que la quantité négative $-a$ est le résultat de B^x, et que l'on a $B^x = (-a)$, cette équation est absurde. Il est impossible que la base B, qui de sa nature est positive, ou plutôt qui n'est ni négative ni positive, parce que ce n'est pas sous cette relation qu'on la considère; il est impossible, dis-je, que cette base élevée à une puissance x quelconque, puisse donner un résultat négatif en conséquence de cette puissance, ou un résultat pronégatif $(-a)$, d'où l'on conclut que le logarithme d'une quantité pronégative $L(-a)$ est une quantité imaginaire ou impossible.

39. Au lieu de tirer cette conséquence, je considère que la relation de négatif à positif est étrangère au principe de la création des logarithmes, et j'en conclus que dans l'équation $B^x = -a$ le signe négatif qui précède a est étranger au résultat que peut donner B^x, et que par conséquent la quantité $-a$ est métanégative, d'où l'on a $x = L-(a)$, et non pas $x = L(-a)$; c'est-à-dire que le signe loga-

rithmique L gouverne immédiatement la quantité a indépendamment de son signe négatif, comme dans le rapport multiple $1 : -(2)$. Le signe : qui exprime le rapport multiple, agit immédiatement sur le nombre 2 indépendamment de son signe.

Pour développer cette conséquence, je considère d'abord qu'une quantité exponentielle quelconque, comme $a^x = b$, peut avoir lieu avec a intrinséquement négatif, comme $(-2)^4 = 16$; je puis encore avoir $(-2)^3 = -8$, etc. Or, par cela même, que je ramène toutes ces bases logarithmiques particulières négatives ou positives à la base générale B^x, qui est positive, ou plutôt qui est étrangère à la relation de positif à négatif, il est nécessaire que je fasse abstraction du signe négatif de ces bases particulières, ou que je ne le considère qu'après. Je ne puis considérer les deux quantités exponentielles $B^x = a^x$ que par ce qui leur est commun; il faut donc que je fasse abstraction du signe négatif de la base particulière. Il est donc en général de la nature des logarithmes de faire abstraction du signe négatif de toutes les bases particulières que l'on ramène à la base générale.

40. C'est aussi de cette manière qu'on considère les logarithmes dans les différentes opé-

rations du calcul. Je suppose d'abord $x^2=a^2$, j'ai de là $Lx=La$; je devrais avoir $Lx=L\pm a$. Car si j'extrayais auparavant la racine, j'aurais d'abord $x=\pm a$, puis $Lx=L\pm a$. En second lieu, si j'ai $x^2=-a^2$, la valeur est imaginaire, et j'ai $Lx=L-a$. Mais si j'ai $x^3=-a^3$, j'aboutirai de même à $Lx=L-a$, quoique la valeur de x soit réelle; cette difficulté n'aura pas lieu en faisant $Lx=L-(a)$. On a d'abord le logarithme de l'inconnue indépendamment de son signe, et c'est tout ce que peut et doit exprimer un logarithme.

Je suppose à présent la base connue. Si j'ai par exemple $(-2)^x=b$, en donnant d'abord différentes valeurs à x, j'aurai $(-2)^1=-2$, $(-2)^2=4$, $(-2)^3=-8$, $(-2)^4=16$, etc. En traitant cette équation par les logarithmes, j'aurai $x=\frac{Lb}{L-2}$, qui donnerait pour tous ces cas une valeur imaginaire pour x, si l'on avait égard au signe négatif de la base, tandis qu'elle serait paire pour tous les cas où x serait un nombre pair. Que serait-elle pour tous les cas où x serait un nombre incommensurable? Il est donc essentiel que le signe négatif soit étranger à la considération logarithmique.

41. En outre, si j'ai $B^x=-a$, j'aurai $x=L-a$; mais en élevant les deux membres

au quarré, on a $B^{2x} = a^2$, d'où $x = La$. Ainsi $La = L - a$, ce qui est vrai, parce que le signe logarithmique L ne gouverne absolument que la quantité a indépendamment de son signe, et l'on a $La = L - (a)$. C'est ainsi que le rapport multiple $1 : -(2)$ est le même que $1 : 2$.

42. Il faut bien distinguer la considération des puissances d'avec celle des logarithmes. Quand j'aboutis à l'équation $x^n = -b$, si la considérant comme puissance, je veux en avoir la racine, j'ai $x = \sqrt[n]{-b}$; le signe du radical affecte directement la quantité en conséquence de son signe, parce que l'élévation de la puissance est formée de même, et il faut que dans cette équation $x = \sqrt[n]{-b}$, l'inconnue x représente en nombre et en signe la même quantité qui est dans l'autre membre. Toutes les fois que cela ne se peut, comme dans les puissances paires, on en conclut que la racine est imaginaire.

Mais si je ramène l'équation $a^x = b$ à la considération logarithmique $x = \frac{Lb}{La}$, la valeur x ne peut représenter que le nombre de fois que a est multiple, pour qu'il en résulte la quantité b indépendamment du signe additionnel de a et de b, parce qu'on ramène cette base a à une

autre étrangère, à la considération de négatif à positif.

43. Pour éclaircir cette théorie, il est nécessaire d'exposer ici la démonstration par laquelle on fait voir que les logarithmes des quantités négatives sont imaginaires; on verra comment cette difficulté s'évanouit, ou plutôt comment cette démonstration se concilie avec ce que l'on vient de dire.

On a, d'après Euler, la série suivante :

$$B^{z\sqrt{-1}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +, \text{ etc.}$$
$$= \cos. z + \sqrt{-1}\sin. z,$$

d'où.... $z\sqrt{-1} = L(\cos. z + \sqrt{-1}\sin. z)$.

En appelant ϖ la demi-circonférence, si l'on fait $z = (2k+1)\varpi$, k étant un nombre entier quelconque, on aura pour toutes les valeurs de k $\sin. z = 0$, $\cos. z = -1$. Donc $(2k+1)\varpi\sqrt{-1} = L-1$. Ainsi le logarithme de -1 a une infinité de valeurs toutes imaginaires.

D'après cette démonstration, il suit encore que les logarithmes des quantités positives ont aussi une infinité de valeurs dont une seule est réelle. En effet, supposons que $z = 2k\varpi$. La formule $z\sqrt{-1} = L(\cos. z + \sqrt{-1}\sin. z)$ donnera pour toutes les valeurs de k, $2k\varpi\sqrt{-1} = L1$, la seule valeur réelle qu'on obtiendra pour L1

sera en faisant $k=0$. Toutes les autres valeurs de k donneront pour L1 des expressions imaginaires, et il pourra y en avoir une infinité.

44. Pour faire voir où aboutit cette démonstration, au lieu de donner à z la valeur ϖ de la demi-circonférence, multipliée successivement par les nombres 0, 1, 3, 5, 7, etc. je lui donne la valeur q du quadrant multipliée successivement par les mêmes nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5; etc.

La formule d'où

$$B^{z\sqrt{-1}}\ldots=\cos z+\sqrt{-1}\sin z \qquad z\sqrt{-1}\ldots=L(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$$

$$\text{donne}\left\{\begin{array}{ll}B^{0.q\sqrt{-1}}\ldots=1\ldots\ldots\ldots\\ B^{1.q\sqrt{-1}}\ldots=\sqrt{-1}\ldots\ldots\\ B^{2q\sqrt{-1}}\ldots=-1\ldots\ldots\\ B^{3q\sqrt{-1}}\ldots=-\sqrt{-1}\ldots & \text{d'où}\\ B^{4q\sqrt{-1}}\ldots=1\ldots\ldots\ldots\\ B^{5q\sqrt{-1}}\ldots=\sqrt{-1}\ldots\ldots\\ B^{6q\sqrt{-1}}\ldots=-1\ldots\ldots\\ \text{etc.}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}0.q\sqrt{-1}\ldots=L1\\ 1.q\sqrt{-1}\ldots=L\sqrt{-1}\\ 2q\sqrt{-1}\ldots=L-1\\ 3q\sqrt{-1}\ldots=L-\sqrt{-1}\\ 4q\sqrt{-1}\ldots=L1\\ 5q\sqrt{-1}\ldots=L\sqrt{-1}\\ 6q\sqrt{-1}\ldots=L-1\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

Maintenant, en ne considérant que les valeurs de cos z, qui est la partie rationnelle de $L(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$, lorsque l'arc du premier quadrant ne vaut encore que zéro, le cosinus $=1$, puis décroît et devient zéro lorsque z vaut le premier quadrant tout entier; il continue de décroître à proportion que l'arc croît au-delà du premier quadrant; enfin ce cosi-





nus $=-1$ quand z acquiert la valeur de deux quadrans.

Si j'imagine cette suite de décroissemens, composés de dixièmes ; elle formera la série additionnelle

$+1+0,9+0,8+0,7\ldots+0,1+0,-0,1-0,2\ldots-0,9-1$

qui correspond à l'accroissement successif de l'arc depuis zéro jusqu'à deux quadrans ; or, pour cela même, que l'on continue de faire croître, dans la même direction, la valeur de z après qu'elle a acquis celle du premier quadrant, qui correspond à cosinus $=0$; il s'ensuit que les valeurs correspondantes du cosinus doivent continuer de décroître dans la même direction, après le terme zéro ; c'est-à-dire, que ses valeurs doivent être pronégatives.

Il s'ensuit, d'après cette considération que l'on a $e^{2q\sqrt{-1}}=(-1)$ et $2q\sqrt{-1}=L(-1)$. C'est-à-dire, que les logarithmes des quantités précédées du signe — sont des logarithmes de quantités pronégatives, et, sous ce point de vue, ils sont imaginaires.

45. Mais maintenant si l'on considère les valeurs négatives des cosinus comme métanégatives, la suite de ces décroissemens s'arrêtera à zéro (36) ; puis c'est la même série qui commence à croître au lieu de décroître, ou qui a une direction d'accroissement contraire à la

première. Par une conséquence nécessaire, l'accroissement de l'arc s'arrête aussi au premier quadrant : ce sera ensuite le second quadrant, et non pas le même arc, continuant de croître au-delà du premier ; ce sera, dis-je, le second quadrant tout seul, qui, commençant par sa valeur toute entière q, décroîtra jusqu'à zéro, tandis que les valeurs métanégatives correspondantes du cosinus croîtront depuis o jusqu'à —(1), ou jusqu'à 1 métanégatif. Le troisième quadrant commencera par $o.q$, et croîtra jusqu'à q, tandis que le rayon métanégatif décroîtra depuis —(1) jusqu'à zéro, lequel terme correspond au degré q du troisième quadrant. Il en sera de même du quatrième. Ce que je dis du cosinus, s'applique aux valeurs du sinus affectées de l'expression imaginaire $\sqrt{-1}$.

J'ai donc, en reprenant la formule,

$$B^{z\sqrt{-1}} = \cos.z + \sqrt{-1}\sin.z \quad \text{d'où} \quad z\sqrt{-1} = L(\cos.z + \sqrt{-1}\sin$$

1er quadr.	$B^{0.q\sqrt{-0}} = -1 + 0 \ldots\ldots$	$0.q\sqrt{-1} = L1 \ldots\ldots = 0,$
	$B^{1.q\sqrt{-1}} = \quad 0 + \sqrt{-1} \ldots$	$q\sqrt{-1} = L\sqrt{-1},$
2me quadr.	$B^{q\sqrt{-1}} = \quad 0 + \sqrt{-1} \ldots$	$q\sqrt{-1} = L\sqrt{-1},$
	$B^{0.q\sqrt{-1}} = -1 + 0 \ldots\ldots$	$0.q\sqrt{-1} = L-(1) \ldots = 0,$
3me quadr.	$B^{0.q\sqrt{-1}} = -1 + 0 \ldots\ldots$	$0.q\sqrt{-1} = L-(1) \ldots = 0,$
	$B^{q\sqrt{-1}} = \quad 0 - \sqrt{-1} \ldots$	$q\sqrt{-1} = L-\sqrt{-1},$
4me quadr.	$B^{q\sqrt{-1}} = \quad 0 - \sqrt{-1} \ldots$	$q\sqrt{-1} = L-\sqrt{-1},$
	$B^{0.q\sqrt{-1}} = \quad 1 + 0 \ldots\ldots$	$0.q\sqrt{-1} = L1 \ldots\ldots = 0.$

On voit qu'en ramenant les résultats négatifs de $B^{a\sqrt{-1}}$ aux quantités métanégatives, toutes les quantités qui peuvent résulter de cette expression sont en partie réelles et en partie imaginaires, et qu'elles sont entre les limites $\pm(1)$ et $\pm\sqrt{-1}$. Alors on n'a plus pour L 1 une infinité de valeurs outre sa valeur $=0$, alors L—1 n'est pas imaginaire. C'est L—(1) qui est la même chose que L 1, parce que le signe — n'est considéré qu'après la relation logarithmique.

46. Or, maintenant, en exprimant la suite des valeurs de la quantité exponentielle $B^{a\sqrt{-1}}$ en fonctions de valeurs trigonométriques, ces valeurs quand elles sont négatives doivent être métanégatives. Les cosinus du second et du troisième quadrant, les sinus du troisième et du quatrième, etc. sont effectifs dans le cercle; ils sont donc métanégatifs, et leur direction en sens contraire des cosinus et des sinus des autres quadrans exprime leur quantité métanégative. Ainsi au lieu de dire sin. a, sin.(1^q+a), sin.(2^q+a), etc. il faut dire sin. (a du premier quadrant), sin. (a du second quadrant). On peut leur donner la notation sin. a_1 ou sin. a simplement, puis sin. a_2, sin. a_3, etc. cos. a, cos. a_2, cos. a_3, etc. les chiffres 2, 3, etc. désignent dans quel quadrant l'arc est pris.

Donc dans cette démonstration il n'est question que de quantités métanégatives, d'autant plus d'ailleurs qu'on ne s'occupe que des quantités métanégatives dans l'ordre multiple; donc dans la progression successive des valeurs que l'on donne à l'exposant de $B^{\cdot\sqrt{-1}}$, il faut s'arrêter à $B^{1\cdot q\sqrt{-1}}$ de la même manière que dans la série multiple.

$$\ldots\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\,\frac{1}{-1}\,\frac{1}{-2}\,\frac{1}{-3}\,\frac{1}{-4} \text{ etc.}$$

On s'arrête au terme $\frac{1}{0}$, où la progression des dénominateurs passe du positif au négatif, pour recommencer la même suite, vue en sens contraire.

On ne peut donc pas démontrer, par le raisonnement ci-dessus, que les logarithmes des quantités négatives est imaginaire. Et la longue discussion, qui a eu lieu sur cette question, vient de ce qu'on a fait usage des quantités pronégatives et métanégatives, indifféremment et sans les distinguer comme il est nécessaire de le faire.

Les logarithmes hyperboliques sont conformes à la théorie qu'on vient de développer, parce que les quantités négatives, qui s'y trouvent, sont de leur nature métanégatives.

47. En général, toutes les valeurs géométriques qui s'expriment par une direction con-

traire à celles des quantités positives, sont de leur nature métanégatives, parce qu'elles sont effectives.

Si j'ai à retrancher la ligne CB de la ligne AB

F. . D ——— A ——— C′ ——— C ——— B

je pourrais, après avoir posé la ligne $AB=a$, retrancher de cette longueur la ligne $AC'=b$, ou bien, en partant de l'extrémité, retrancher également $CB=b$, il me resterait dans le premier C′B, et dans le deuxième AC, qui ont la même valeur ; mais dans le premier cas la soustraction est vicieuse, parce que l'on change l'origine des valeurs qui se trouve après la soustraction transportée en C′. Il est donc nécessaire, par la nature de la soustraction géométrique, que l'on fasse partir la quantité négative de l'extrémité B, et qu'on lui donne une direction d'accroissement, contraire à la direction positive : par cette disposition la soustraction est effectuée.

Si la ligne CB, à retrancher, est plus grande que la ligne positive AB, il sera nécessaire qu'elle continue sa direction en deçà du point A vers D. De sorte que, si l'on a $a-b=-c$, la quantité négative $-(c)$ sera exprimée par la ligne AD, ayant une direction contraire à la positive : elle sera effective, elle sera donc

métanégative. Pour avoir une quantité pronégative, qui eût par conséquent la même direction que la ligne AB, il faudrait remonter l'origne vers un point ineffectif F, on aurait $FA = \nu$, et la quantité $(-c) = \nu - c$ serait $FA - AD = FD$, quantité ineffective.

RÉSUMÉ.

48. En général, toutes les quantités que l'on considère dans le calcul, et qui sont négatives, sont par cela même métanégatives. Ce n'est que pour les rapports d'inéquation dans le mode additionnel qu'on a besoin de considérer les quantités pronégatives. Les inéquations $n-3 < n-2$ produisent celles de la forme $-3 < -2$ qui nécessitent la conception des quantités pronégatives, d'après laquelle la comparaison ne tombe pas sur les quantités précédées du signe $-$, mais sur des quantités ineffectives qui sont étrangères à celles que l'on considère dans le calcul. C'est pourquoi Carnot les appelle *symboles algébriques*. La synthèse ne crée point de quantités pronégatives, elles naissent du résultat de l'analyse, comme $x = (-a)$; mais dans les équations elles ne souffrent aucune difficulté, on les fait $x = -(a)$ sans concevoir antérieurement la conception pronégative $x = (-a)$. Sans les

rapports d'inéquation, cette conception antérieure serait futile et chimérique; mais elle est nécessaire pour expliquer les difficultés qui se rencontrent dans les rapports des quantités négatives; elle est nécessaire dans le calcul des inéquations, où l'analyse donne souvent des résultats de la forme $x < (-a)$, qui sont immédiatement pronégatifs; mais que l'on effectue en faisant $x = - > a$ ou $x - > a$.

CHAPITRE III.

De la résolution des équations algébriques du troisième degré.

49. Les formules que l'on obtient pour la résolution des équations sont assez simples; mais comme je me propose, dans ce chapitre, de développer la théorie du calcul des inéquations, il est nécessaire d'entrer dans certains détails inutiles pour la résolution pratique des équations, et néanmoins indispensables pour éclairer cette théorie. Ce chapitre contient deux modes de solution, le premier est, à proprement parler, purement théorique; il sert de base au deuxième mode: ce dernier s'applique généralement à tous les cas. Je l'appellerai *mode de solution double*, et le *premier mode de solution simple*: on verra les raisons de cette dénomination.

PREMIÈRE SECTION.

Premier mode de solution, ou mode de solution simple.

Ce premier mode de solution renferme deux méthodes qui conduisent, l'une et l'autre, à la valeur de la plus petite racine de l'équation par deux directions opposées. Il est nécessaire de développer ces deux méthodes successivement, avant de traiter le mode de solution double.

Première méthode de solution simple.

50. Soit proposé de résoudre l'équation générale du second degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

J'imagine cette équation formée par le produit des deux facteurs

$$(x + p)(x^2 + Px + q) = 0.$$

En les multipliant et comparant le résultat à la proposée, j'ai d'abord

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + Px^2 + Qx \\ \quad + px^2 + pPx + pQ \end{array}\right\} = 0,$$

d'où j'obtiens les trois équations auxiliaires $\left\{\begin{array}{l} A = P + p \\ B = Q + Pp, \\ C = Qp. \end{array}\right.$

Si je me bornais à chercher avec ces trois équations la valeur d'une des indéterminées P, Q, p, j'arriverais à une équation d'un degré égal à celui de la proposée, et j'aurais pour la valeur de p,

$$p^3 - Ap^2 + Bp - C = 0.$$

En général, de quelque manière que l'on décompose et que l'on recompose des équations avec des coëfficiens indéterminés quelconques, si l'on n'emploie pour les déterminer que la méthode des équations, on obtiendra toujours un résultat qui sera au moins aussi composé que l'équation proposée.

Mais j'observe qu'en résolvant le facteur $x^2 + Px + Q = 0$, les deux valeurs que j'obtiens,

$$x = -\tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}P^2 - Q},$$

sont composées de deux parties : la première rationnelle $= -\frac{1}{2}P$, c'est la seule qui a lieu quand les deux racines sont égales. De sorte que la partie irrationnelle $\sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$ est ce qui constitue l'inégalité des deux racines.

Si pour trouver la valeur de cette partie irrationnelle, je fais $\frac{1}{4}P^2 - Q = z$, selon la méthode des équations, j'aboutirais encore à une équation en z du troisième degré. Au lieu de faire une nouvelle équation, j'exprimerai cette inconnue sous le rapport de sa limite, et je ferai

$$\tfrac{1}{4}P^2 - Q > 0, \text{ d'où } Q < \tfrac{1}{4}P^2.$$

De l'inéquation. 51. C'est ce que j'appelle *inéquation;* elle exprime une *quasi-valeur.* Cette expression équivaut à l'équation $Q = \frac{1}{4}P^2 - z$. L'inconnue z est la *latitude* de la quasi-valeur. Cette espèce d'inconnue ne s'exprime point dans le calcul des inéquations, mais on parvient néanmoins à la faire disparaître, et alors l'équation est résolue. Ainsi le signe d'égalité entre deux expressions n'est pas l'instrument dont on se sert pour arriver à la valeur que l'on cherche, comme dans la méthode des équations, l'égalité est le terme où l'on aboutit. Cela posé,

de l'équation auxiliaire $Q = B - Pp$,
et de l'inéquation. . . . $Q < \frac{1}{4}P^2$,

on parvient à l'inéquation du second degré

$$p^2 - \frac{2}{3}Ap + \frac{4B - A^2}{3} < 0,$$

d'où l'on extrait d'abord la double quasi-valeur

$$p < \frac{1}{3}(A \pm 2\sqrt{A^2 - 3B}).$$

Mais maintenant, d'après la cinquième règle (26), le signe d'inéquation doit changer avec le signe additionnel du radical. On a donc les deux quasi-valeurs

$$p < \frac{1}{3}(A + 2\sqrt{A^2 - 3B}),$$
$$p > \frac{1}{3}(A - 2\sqrt{A^2 - 3B}).$$

J'observe maintenant que la première de ces deux quasi-valeurs étant plus grande que p, est plus grande qu'aucune des valeurs dont p est susceptible ; elle est donc plus grande que la plus grande racine de la proposée ; mais il est évident qu'elle en approche de plus près que des deux autres ; elle exprime donc la quasi-valeur de la plus grande racine de l'équation. J'appelle cette quasi-valeur φ,

d'où j'ai. . . . . . . $p_3 < \varphi$.

Je me sers de la notation p_3 pour marquer que cette quasi-valeur appartient à la plus grande racine, c'est-à-dire à la troisième, en suivant l'ordre des nombres.

Par la même raison, la seconde des deux quasi-valeurs $\frac{1}{3}(A - 2\sqrt{A^2 - 3B})$ étant plus petite qu'aucune des valeurs de p, est la quasi-valeur de la plus petite racine, je l'appelle ϖ,

d'où j'ai. . . . . . . $p_1 > \varpi$.

Ces deux quasi-valeurs avec l'équation auxiliaire $p = A - p$, me donnent pour P les deux quasi-valeurs,

$$\text{pour } \varphi \ldots \quad P > \tfrac{1}{3}(A - \sqrt{A^2 - 3B});$$
$$\text{pour } \varpi \ldots \quad P < \tfrac{1}{3}(A + \sqrt{A^2 - 3B}).$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, la première de ces deux quasi-valeurs est plus petite qu'aucune des valeurs dont P est sus-

ceptible : elle est donc la quasi-valeur de la somme des deux plus petites racines de la proposée. Par la même raison, la seconde est la quasi-valeur de la somme des deux plus grandes racines. J'appelle Π cette dernière qui correspond à ϖ, et Φ la première qui correspond à φ, et en résumant, j'aurai

52. pour la somme des deux plus grandes racines $\Big\}\ \frac{2}{3}(A+\sqrt{A^2-3B})=\Pi$, d'où $P<\Pi$;

pour la plus petite racine $\Big\}\ \frac{1}{3}(A-2\sqrt{A^2-3B})=\varpi$, d'où $p_1>\varpi$;

pour la somme des deux plus petites racines $\Big\}\ \frac{2}{3}(A-\sqrt{A^2-3B})=\Phi$, d'où $P>\Phi$;

pour la plus grande racine $\Big\}\ \frac{1}{3}(A+2\sqrt{A^2-3B})=\varphi$, d'où $p_1<\varphi$.

Ces quasi-valeurs, que j'appelle *originelles*, ne renferment que la relation des deux premiers coëfficiens A et B de la proposée. Avant de les rendre complètes, il est nécessaire d'appliquer ces premières formules à différens exemples pour confirmer la théorie que j'ai développée. Le tableau ci-joint, page 78, contient dix-neuf exemples différens ; il a fallu en donner ce grand nombre pour résoudre toutes les difficultés, ou plutôt pour faire voir comment les différens cas s'accordent avec la théorie. La première partie, jusqu'au douzième exemple, contient des équations dont toutes



les racines sont réelles : la deuxième partie contient les équations dans lesquelles deux racines sont imaginaires.

53. Toutes les équations du tableau ont été formées directement par la multiplication de trois facteurs simples, et l'on a exposé, dans chacune, les racines qui les ont formées, afin qu'on pût comparer les différentes quasi-valeurs, avec les valeurs correspondantes de l'équation. Les lignes I et II expriment les quasi-valeurs de ϖ et de φ.

Dans les quatre premiers exemples les quasi-valeurs appartiennent à des équations, où toutes les racines sont négatives, conformément aux signes externes de la proposée $x^3+Ax^2+Bx+C=0$; et dans lesquelles les valeurs de p sont, par conséquent, positives, parce que $x=-p$. On voit qu'on a dans toutes $p_{,}>\varpi$, $p_{,}<\varphi$.

On peut remarquer néanmoins, que dans le cinquième et sixième exemple, la quasi-valeur de ϖ a une forme négative, quoique la vraie valeur soit positive; mais la direction $p>\varpi$ ne leur est pas moins conforme; car cette direction du signe d'inéquation, annonce qu'en ajoutant une valeur positive z à la quasi-valeur ϖ, on arrivera à la vraie valeur de p. Cette forme négative vient de ce que la latitude z,

ou le déficit de la quasi-valeur ϖ, surpasse la valeur de la petite racine : et cela a lieu toutes les fois que toutes les racines étant négatives, ou bien tous les coëfficiens de la proposée étant positifs, on a, en même temps, dans la quasi-valeur $p_1 > \frac{1}{3}(A - 2\sqrt{A^2 - 3B}$, $A < 2\sqrt{A^2 - 3B}$ ou $B < \frac{1}{4}A^2$. Cette quasi-valeur n'est négative en p que parce qu'elle n'est pas complète, comme on le verra. J'appelle ces quasi-valeurs *extradivergentes.*

Elles ressemblent à l'inéquation $1 > -3$ dont on a parlé ci-dessus. On a donc de ces sortes d'inéquations, puisque l'analyse les donne ; et on voit ce qu'elles signifient.

55. Le huitième exemple a les mêmes racines que le premier, à l'exception qu'elles sont positives en x, et négatives en p. On voit que dans cet exemple ϖ ou $p > (-3{,}1547)$, qui devient, en l'effectuant, (20) $p = - < 3{,}1547$ équivaut à $p_1 = - > \varphi$ du premier exemple : et que réciproquement la quasi-valeur φ ou $p_1 < (-0{,}8453)$ équivaut à $p = - > \varpi$ du même exemple ; de sorte que l'ordre des quasi-valeurs est renversé.

En effet, si dans les quasi-valeurs de Π, ϖ etc. on fait A négatif, comme cela doit être dans les équations dont les racines sont positives en

x, et négatives en p, on aura, en faisant ressortir le signe négatif de A,

$$P <\Pi \text{ devient } P < \tfrac{2}{3}(-A + \sqrt{A^2 - 3B} \text{ ou } P =-> \tfrac{2}{3}(A - \sqrt{A^2 - 3B} \text{ ou } P =-> \Phi$$
$$p_3 < \varpi \ldots\ldots p_1 > \tfrac{1}{3}(-A - 2\sqrt{A^2 - 3B} \ldots p_1 =-< \tfrac{1}{3}(A + \sqrt{A^2 - 3B} \ldots p_1 =-< \phi$$
$$P > \Phi \ldots\ldots P > \tfrac{2}{3}(-A - \sqrt{A^2 - 3B} \ldots P =-< \tfrac{2}{3}(A + \sqrt{A^2 - 3B} \ldots P =-< \Pi$$
$$p_3 < \phi \ldots\ldots p_3 < \tfrac{1}{3}(-A + 2\sqrt{A^2 - 3B}) \ldots p_3 =-> \tfrac{1}{3}(A - \sqrt{A^2 - 3B}) \ldots p_3 =-> \varpi$$

56. Ceci est conforme à la théorie qu'on a établie relativement aux quantités pronégatives. Quand les racines sont positives en p, elles sont selon l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc.; la plus petite est celle qui appartient au plus petit nombre. Il faut remarquer que les quasi-valeurs de p, que l'on obtient, naissent de l'équation $p^3 - Ap^2 + Bp. - C = 0$. C'est l'équation à laquelle on aurait abouti si l'on ne l'eût pas abaissée d'un degré par la substitution de l'inéquation $Q < \frac{1}{4}P^2$ à la place de $Q = \frac{C}{p}$. Or cette équation, par les signes extérieurs de ses coëfficiens, doit avoir toutes les racines positives; et c'est, en conséquence, de cette forme qu'on a obtenu les quasi-valeurs $p_1 > \varpi$, etc. : ces inéquations appartiennent donc à des quantités qui ont une direction positive; lors donc que, par la valeur intrinsèque de A, ϖ se trouve être une quantité négative, l'inéquation $p_1 > \varpi$ ne peut être néga-

tive en conservant sa même direction qu'autant qu'elle est pronégative, il faut qu'elle appartienne aux premiers termes de la suite, $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3+4$, etc. dont tous les termes ont la même direction. La plus petite de toutes ces valeurs est la plus grande, en nombre, précédée du signe —, et ϖ, qui est plus petite que la plus petite racine, doit excéder, en nombre, la plus grande racine négative : c'est ce qui a lieu ; car on a pour ϖ, $p>(-3,1547)$ et la plus petite racine est -3 ; mais, en effectuant, l'ordre est renversé avec le signe d'inéquation, ϖ se change en $-(\varphi)$ en faisant ressortir le signe négatif, Π en (Φ), etc.

57. Dans les exemples suivans, où les racines sont en partie négatives et en partie positives, les quasi-valeurs de ϖ sont également pronégatives : ainsi, dans l'exemple neuvième, on a $p>(-3,5724)$, qui, effectuée, devient $p=-<3,5724$, elle appartient à la plus grande racine négative $p=-3$, les deux autres valeurs de p sont $p=-1$ et $p=2$; et cette quasi-valeur excède, en nombre, la racine -3, parce qu'elle est plus petite que la racine : ce qui est encore une suite nécessaire de la nature des quantités pronégatives, et de l'inéquation générale $(-3)<(-2)$.

58. Maintenant pour rendre les quasi-valeurs ϖ et φ complètes, je tire de l'inéquation. . . . . $Q < \frac{1}{4}P^2$,
et de l'inéquation opposée. . . . . $\frac{1}{4}\Pi^2 > \frac{1}{4}P^2$.

L'inéquation. . . . . $Q < \frac{1}{4}\Pi^2$
qui avec l'équation $Q = \frac{C}{p}$ } donne $\frac{C}{p} < \frac{1}{4}\Pi^2$,

d'où j'obtiens. . . $p_1 > \frac{C}{\frac{1}{4}\Pi^2}$;

et en substituant la valeur de Π,

$$p_1 > \frac{C}{\frac{1}{9}(A + \sqrt{A^2 - 3B})^2}.$$

Cette quasi-valeur qui n'a encore qu'une limite, mais qui est complète, étant plus petite qu'aucune des valeurs de p, est plus près de sa plus petite valeur que de toute autre : elle est donc l'expression de la petite quasi-valeur complète; elle appartient donc à p_1; je la désigne par $k\varpi$,

d'où j'ai $k\varpi = \frac{C}{\frac{1}{9}(A + \sqrt{A^2 - 3B})^2}$.

Si je compare maintenant la même inéquation. . . . . $Q < \frac{1}{4}P^2$,
avec l'autre inéquation. . . . . $\frac{1}{4}\Phi^2 < \frac{1}{4}P^2$,
Je ne puis pas conclure de là la direction d'inéquation entre Q et $\frac{1}{4}\Phi^2$. J'exprime cette der-

nière inconnue par le signe ||, d'où je tire par la même opération que ci-dessus,

$$p_3 \parallel \frac{C}{\frac{1}{4}\Phi^2}.$$

Puis en substituant la valeur de Φ,

$$p_3 \parallel \frac{C}{\frac{1}{9}(A-\sqrt{A^2-3B})^2}.$$

Cette seconde quasi-valeur est exprimée en fonctions de Φ, comme la première $k\varpi$ est exprimée en fonctions de Π. Or Φ est plus petit que la somme des deux plus petites racines. Le quotient $\frac{C}{\frac{1}{4}\Phi^2}$ doit donc appartenir à la grande quasi-valeur, comme le quotient de $\frac{C}{\frac{1}{4}\Pi^2}$ appartient à la plus petite. Je l'appellerai $k\varphi$,

d'où j'ai $k\varphi = \frac{C}{\frac{1}{9}(A-\sqrt{A^2-3B})^2}$.

59. Il s'agit de voir quels sont les cas où l'on doit avoir $p<k\varphi$ et $p>k\varphi$. Je substitue d'abord dans l'équation auxiliaire $Q=B-Pp$, les quasi-valeurs originelles Π, et ϖ à la place de P et de p; au lieu d'une équation, j'aurai une inéquation dont je ne connais pas la direction; j'ai donc $Q \parallel B-\Pi\varpi$. Or, en substituant les valeurs de Π et de ϖ, j'ai

$$B-\Pi\varpi=\tfrac{1}{9}(2A^2-3B+2A\sqrt{A^2-3B}),$$
$$=\tfrac{1}{9}(A+\sqrt{A^2-3B})^2,$$
$$=\tfrac{1}{4}\Pi^2\ldots\ldots\ldots\ldots (52).$$

Or on a $Q<\frac{1}{4}\Pi^2$(58). Donc $Q<B-\Pi\varpi$.

Donc l'inéquation $p_1>\frac{C}{\frac{1}{4}\Pi^2}$ devient

$$p_1>\frac{C}{B-\Pi\varpi}=>k\varpi.$$

En substituant de même les valeurs de Φ et de φ, j'ai également

$$B-\Phi\varphi=\tfrac{1}{9}(A-\sqrt{A^2-3B})^2=\tfrac{1}{4}\Phi^2.$$

Or $Q\,||\,\frac{1}{4}\Phi^2$. Donc on a $Q\,||\,B-\Phi\varphi$; et par conséquent l'inéquation $p_3\,||\,\frac{C}{\frac{1}{4}\Phi^2}$ devient

$$p_3\,||\,\frac{C}{B-\Phi\varphi}=||\,k\varphi.$$

60. Ces nouvelles expressions vont servir à déterminer la direction incertaine de cette dernière quasi-valeur. Je compare le produit Pp aux deux produits $\Pi\varpi$ et $\Phi\varphi$. Et d'abord, si je suppose que P reçoive un excès de valeur $=z$ aux dépens de l'autre valeur correspondante p_1, j'aurai au lieu de Pp, $(P+z)(p_1-z)$, qui correspondra au produit $\Pi\varpi$; car Π a précisément en plus ce que ϖ a en moins, à cause de $\Pi+\varpi=A$. Ce nouveau produit $=Pp-(P+z-p)z$ sera toujours plus petit que Pp, tant que la

quantité $P+z+p$ formera un résultat positif, ou tant que l'on aura $p < P+z$. Donc dans le produit $\pi\varpi$, où ϖ correspond à la plus petite racine, et où par conséquent $p_1 < P+z$, on doit avoir $Pp > \pi\varpi$, et par conséquent l'équation $Q = B - Pp$ devient $Q < B - \pi\varpi$. Donc on a toujours $p_1 > \frac{C}{B - \pi\varpi}$.

En comparant maintenant $\Phi\varphi$ à Pp, si on imagine de même que p reçoive un excès de valeur aux dépens de P, ce qui a lieu dans le produit $\Phi\varphi$, on aura $(P-z)(p_3+z)$, ou bien $\Phi\varphi = Pp_3 - (p_3 + z - P)z$; or ce produit $\Phi\varphi$ sera $< Pp_3$ lorsqu'on aura $p_3 + z > P$ ou $\varphi > P$, en mettant pour $p_3 + z$ sa valeur φ; ou, si l'on veut encore, lorsqu'on aura $p_3 > \Phi$. L'équation $Q = B - Pp$ devient donc alors $Q < B - \Phi\varphi$; et par conséquent l'on a

$$p_3 > \frac{C}{B - \Phi\varphi} \quad \text{si } p_3 > \Phi.$$

Au contraire, le produit $Pp_3 - (p_3 + z - P)z$ ou $\Phi\varphi$ sera $> Pp$, si $p_3 < P - z$ ou $p_3 < \Phi$, et, à plus forte raison, si $\varphi < \Phi$, on aura donc alors $Q > B - \Phi\varphi$; et, par conséquent,

Premier cas..... $p_3 > \frac{C}{B - \Phi\varphi}$ si $p_3 > \Phi$.

Deuxième cas.... $p_3 < \frac{C}{B - \Phi\varphi}$ si $\varphi > \Phi$,

61. Pour développer le principe de cette variété, il faut remarquer que si on partage un nombre en deux autres, le plus grand produit, qui puisse en résulter, est quand il est partagé en deux parties égales : et le plus petit produit est quand l'une de ces parties $= 0$, et l'autre $=$ le nombre tout entier. Maintenant, le produit $\Pi\varpi$ est composé de deux facteurs, dont la somme $= \text{A}$. Si l'on imagine donc que ϖ croisse depuis o jusqu'à p_{I}, Π décroissant de même, pour faire toujours la même somme A, le produit $\Pi\varpi$ ira toujours en croissant jusqu'à ce qu'on arrive à $\text{P}p_{\text{I}}$; mais tant que ϖ serait $< p_{\text{I}}$, comme cela a lieu quand les racines sont réelles, le produit $\Pi\varpi$ sera $< \text{P}p_{\text{I}}$, d'où $\text{Q} < \text{B} - \Pi\varpi$; et, par conséquent, $p_{\text{I}} > \frac{\text{C}}{\text{B} - \Pi\varpi}$ jusqu'à ce que $\varpi = p_{\text{I}}$; alors on aura $p_{\text{I}} = \frac{\text{C}}{\text{B} - \text{P}p}$.

Supposons maintenant que ϖ croisse au-delà de la valeur de p_{I}, j'appelle ϖ' cette quasi-valeur et Π' la valeur de Π, qui aura diminué d'autant, on aura alors $\Pi'\varpi' > \text{P}p_{\text{I}}$, et par conséquent $p_{\text{I}} < \frac{\text{C}}{\text{B} - \Pi'\varpi'}$: c'est ce qu'on verra dans la suite, lorsqu'on obtiendra la première quasi-

valeur ϖ, avec la direction $p_1 < \varpi$. Il est bon de s'en souvenir.

En considérant cette quasi-valeur, par rapport à la deuxième racine, j'aurai $p_2 > \frac{C}{B - \Pi'\varpi'}$ tant que ϖ' serait $< p_2$ parce que j'aurai $\Pi'\varpi' < Pp_2$, jusqu'à ce que j'arrive à $\varpi' = p_2$, j'aurai $p_2 = \frac{C}{B - Pp_2}$; en faisant croître encore ϖ' au-delà de p_2, j'aurai alors $p_2 < \frac{C}{B - \Pi''\varpi''}$, qui, relativement à la troisième racine p_3, sera $p_3 > \frac{C}{B - \Pi''\varpi''}$. Enfin, si je fais croître ϖ'' jusqu'au-delà de p_3, j'arriverai à la quasi-valeur φ, et j'aurai $p_3 < \frac{C}{B - \Phi\varphi}$, parce que j'ai $p_3 < \Phi$; mais il faut, pour cela, que P reste toujours $> p_3$. Dans ce cas, comme on aura $P > \Phi, p_3 < \varphi$, le produit $\Phi\varphi$ approchera plus du maximum de produit, que Pp_3; on aura donc $\Phi\varphi > Pp_3$, et, par conséquent, $p_3 < \frac{C}{B - \Phi\varphi}$.

Mais si la plus grande racine p_3 est plus grande que la somme des deux autres P_1, ce sera le contraire ; φ qui sera alors le plus grand des deux facteurs de $\Phi\varphi$, sera plus grand que p_3, qui est le plus grand facteur de Pp_3, et Φ, qui

est le plus petit facteur, sera plus petit que P_1; le produit $\Phi\varphi$ s'éloignera donc plus du maximum de produit que Pp_3; ce sera, en sens contraire, la même relation que celle de $\Pi\varpi$ à Pp_1; on aura donc $\Phi\varphi < Pp_3$, et par conséquent $p_3 > \frac{C}{B - \Phi\varphi}$.

Au reste, cette discussion, relativement à la variété de direction de la grande quasi-valeur complète est purement théorique, on n'en fait aucun usage dans le calcul des inéquations : on ne s'occupe que de la quasi-valeur complète de la plus petite racine p_1. Ainsi je me bornerai à employer pour p_3 le signe incertain $\|$, et j'aurai $p_3 \| \frac{C}{B - \Phi\varphi}$.

62. J'ai supposé les valeurs de p positives, mais supposons-les négatives, et que par conséquent les coëfficiens A et C de la proposée soient intrinséquement négatifs. Comme dans ce cas l'inéquation $p_1 > \varpi$ devient $p > (-\varphi)$, en faisant ressortir le signe négatif, ou $p = - < \varphi$ (55); par la même raison, la quasi-valeur complète $p_1 > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$ deviendra, en faisant ressortir les signes négatifs de A et de C, $p_1 - \| \frac{C}{B - \Phi\varphi}$,

et réciproquement la quasi-valeur $p_3 \parallel \frac{C}{B - \Phi\phi}$

devient $p_3 = - > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$.

63. On voit que quand les racines sont toutes du même signe additionnel, c'est toujours la plus petite quasi-valeur en nombre et indépendamment de son signe qui a une direction d'inéquation invariable, quand elle est complète. Quand les racines sont négatives, ou toutes positives en p, c'est la valeur de ϖ qui est la plus petite quasi-valeur en nombre; quand elles sont toutes négatives en p, c'est la valeur de ϕ qui se change alors en ϖ.

64. Mais quand les racines sont en partie positives et négatives, Π et Φ peuvent varier d'une infinité de manières relativement à ϖ et à ϕ; alors la plus petite racine en nombre peut appartenir à ϖ, ou à ϕ, ou à la quasi-valeur moyenne.

Pour éviter toute ambiguité relativement aux mots *plus petit* et *plus grand*, j'appellerai *la plus petite racine*, celle qui est la plus petite en nombre indépendamment de son signe; et *la première racine*, celle dont la quasi-valeur est exprimée par $p_1 > \varpi$. Ainsi dans l'équation dont les trois valeurs en p sont -3, -1, $+2$, la première racine est -3, c'est celle qui

correspond à $p > \varpi$, et elle n'est pas la plus petite racine qui est -1.

Lors donc que les racines sont de différens signes, on ne peut établir aucune règle relativement à la direction de la quasi-valeur complète $k\varpi$. Il n'y a que les quasi-valeurs originelles ou incomplètes $p_1 > \varpi$ et $p_3 < \varphi$, qui ayent une direction invariable, quel que soit le signe additionnel des racines.

65. Ces deux inéquations extrêmes sont la base du calcul. On peut remarquer qu'elles ne distinguent pas directement les racines de l'équation, elles n'assignent que les deux limites opposées de toutes les valeurs dont p est susceptible; c'est ainsi dans tous les degrés; et c'est à l'aide de ces limites qu'on parvient successivement à séparer les racines.

66. Pour éviter la complication qui résulterait dans le calcul et la théorie, par rapport aux équations dont les racines auraient des signes additionnels différens, on suppose d'abord que les coëfficiens de la proposée, dans quelque degré que ce soit, $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}$, etc. sont tous intrinséquement positifs; et quand ils sont d'une valeur quelconque négative ou positive, on les ramène à une équation dont toutes les racines ont le même signe. Néanmoins on aboutit à des formules de solution

qui conviennent à toutes les équations, quel que soit le signe additionnel de leur racine, sans qu'il soit nécessaire de faire subir aucune transformation aux équations, comme on le verra dans le second mode de solution.

On commencera donc ici par supposer que tous les coëfficiens de l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

sont intrinséquement positifs, que par conséquent les racines sont toutes négatives en x et positives en p. Si elles sont réelles, on a pour les quasi-valeurs complètes les inéquations

67. $$p_1 > \frac{C}{B - \Pi\varpi} \ldots p_3 \,\|\, \frac{C}{B - \Phi\varphi};$$

et en substituant, au lieu de Π et de Φ, leur valeur $A - \varpi$, et $A - \varphi$,

$$p_1 > \frac{C}{\varpi^2 - A\varpi + B} = > k\varpi \ldots p_3 \,\|\, \frac{C}{\varphi^2 - A\varphi + B} = \,\|\, k\varphi.$$

68. Il s'agit maintenant de déterminer la direction de ϖ à $k\varpi$ et de φ à $k\varphi$. Pour la connaître, je fais cette suite d'inéquations incertaines :

$$\varpi - k\varpi \,\|\, 0 . \varpi - \frac{C}{\varpi^2 - A\varpi + B} \,\|\, 0 . \varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C \,\|\, 0.$$

Or cette dernière inéquation est précisément de la même forme que l'équation

$$p^3 - Ap^2 + Bp - C = 0.$$

C'est cette même équation dans laquelle on aurait mis la quasi-valeur ϖ à la place de p. Elle doit donc être considérée comme composée des trois facteurs $(\varpi - a)(\varpi - b)(\varpi - c) \parallel o$, en appelant a, b, c, les racines de la proposée. Or de $p_1 > \varpi$, il s'ensuit que ϖ est moindre que la plus petite racine, et que par conséquent ces trois facteurs sont négatifs. On a donc

$$\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C < o,$$

de là... $\varpi < \dfrac{C}{\varpi^2 - A\varpi + B}$ et $\varpi < k\varpi$.

Pour déterminer la direction de φ à $k\varphi$, comme cette inéquation complète a son signe d'inéquation variable, je considère d'abord $\begin{cases} p_3 < \varphi \\ p_3 > k\varphi \end{cases}$. J'ai dans ce premier cas, à plus forte raison, $\varphi > k\varphi$, d'où $\varphi > \dfrac{C}{\varphi^2 - A\varphi + B}$; enfin $\varphi^3 - A\varphi^2 + B - C > o$; je prends ensuite le deuxième cas $\begin{cases} p_3 < \varphi \\ p_3 < k\varphi \end{cases}$. Comme on ne peut rien conclure de là, j'ai d'abord $\varphi \parallel k\varphi$, puis $\varphi \parallel \dfrac{C}{\varphi^2 - A\varphi + B}$, enfin $\varphi^3 - A\varphi^2 + B - C'' o$; mais en la décomposant de même en ses trois facteurs $(\varphi - a)(\varphi - b)(\varphi - c) \parallel o$, comme φ est plus grand que la plus grande valeur de p, à

cause de $p < \varphi$, ces trois facteurs sont tous positifs, si les trois racines sont réelles. On a donc encore $\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - c > 0$, d'où $\varphi > k\varphi$. Ainsi, cette dernière inéquation $\varphi > k\varphi$ est invariable.

En reprenant maintenant les deux inéquations

69. $\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C < 0 \ldots$ 1re,
$\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C > 0 \ldots$ 2me,

si je mets à la place de ϖ et de φ leurs valeurs, j'aurai

70. $-2A^3 + 9AB - 27C - 2\sqrt{(A^2 - 3B)^3} < 0 \ldots$ 1re,
$-2A^3 + 9AB - 27C + 2\sqrt{(A^3 - 3B)^3} > 0 \ldots$ 2me.

Il est aisé de faire voir maintenant que ces deux inéquations appartiennent généralement à toute équation du troisième degré, quelle que soit la valeur des coëfficiens, ou quel que soit le signe additionnel des racines. En effet, à cause de $p_1 > \varpi$ et $p_3 < \varphi$, toutes les racines sont entre ces deux limites, quel que soit leur signe. Par exemple, si les racines en valeurs de p sont 1, 2, 3, ϖ sera < 1 et $\varphi > 3$; et si elles sont, comme dans le neuvième exemple, $-3 - 1 + 2$, ces trois valeurs sont encore entre ϖ et φ, car on a $p_1 > \varpi = > -3{,}5724$ et $p < \varphi = < 2{,}2392$. Supposons donc qu'on augmente successivement la quasi-valeur ϖ en

lui ajoutant des quantités positives jusqu'à ce qu'elle parvienne à la valeur de φ, on franchira d'abord la valeur de la première racine, et l'on aura alors $\varpi'^3 - A\varpi'^2 +$, etc. > 0, après avoir franchi la seconde. Cette inéquation deviendra < 0. Enfin, après la troisième, elle deviendra > 0; mais alors ce sera

$$\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C > 0.$$

Ces deux inéquations, l'une en ϖ et l'autre en φ, ne peuvent donc pas avoir le même signe d'inéquation si les trois racines sont réelles.

Mais maintenant si on considère ces deux mêmes inéquations en valeurs de coëfficiens $-2A^3+9AB$, etc. on voit qu'elles ne diffèrent que par le signe additionnel qui précède le radical $\sqrt{(A^2-3B)^3}$, donc il est nécessaire que celle de ces deux inéquations où ce radical est précédé du signe $+$, soit > 0, et que l'autre soit < 0; donc ces deux inéquations appartiennent généralement aux équations du troisième degré, quels que soient le signe et la valeur des racines, et elles sont les deux équations de condition, d'après lesquelles les trois racines doivent être réelles.

En les multipliant l'une par l'autre, il est clair que leur produit sera négatif; et au lieu de deux inéquations conditionnelles, j'aurai la suivante qui les renfermera toutes les deux :

71. $4A^3C - A^2B^2 - 18ABC + 4B^3 + 27C^2 < 0$,

résultat que l'on obtient par la méthode des équations, et qui est le même que celui trouvé par La Grange. On voit déjà comment le calcul des inéquations décompose les fonctions que la méthode des équations ne peut offrir que dans un état de composition.

Les deux inéquations (70) peuvent être ainsi exprimées :

72. $A^3 - 27C - 3A(A^2 - 3B) - 2\sqrt{(A^2 - 3B)^3} < 0$... 1re,
$A^3 - 27C - 3A(A^2 - 3B) + 2\sqrt{(A^2 - 3B)^3} > 0$... 2me.

73. Cette relation des trois coëfficiens constitue l'inégalité des racines. Car quand elles sont toutes égales, on a séparément $A^3 - 27C = 0$, $A^2 - 3B = 0$, et ces deux inéquations sont $= 0$;

on a alors ϖ et $\varphi = \frac{1}{3}A$, $k\varpi$ et $k\varphi = \frac{C}{\frac{1}{9}A^2} = \frac{1}{3}A$.

J'exprimerai la relation rationnelle des coëfficiens A, B, C, par SC. Cette expression veut dire *somme rationnelle des relations des coëfficiens jusqu'à* C. Je ferai en même temps le radical originel $\sqrt{A^2 - 3B} = \sqrt{r}$, d'où les deux inéquations ci-dessus prendront la forme

74. $\left.\begin{array}{l} 1^{re}\ldots\ SC - 2r\sqrt{r} < 0 \\ 2^{me}\ldots\ SC + 2r\sqrt{r} > 0 \end{array}\right\}$ ou $\left\{\begin{array}{l} SC < 2r\sqrt{r}. \\ SC > -2r\sqrt{r}. \end{array}\right.$

Je remarque maintenant que les deux inéqua-

tions $SC < 2r\sqrt{r}$ et $SC > 2r\sqrt{r}$ sont les deux racines du quarré $SC^2 < 4r^3$. Et en exprimant cette dernière en valeurs de coëfficiens, on aurait tout de même l'inéquation ci-dessus. On peut observer qu'en élevant au quarré une de ces inéquations, on ne fait que recomposer la décomposition qu'on avait faite, et alors l'autre inéquation sert toujours d'inéquation de condition pour déterminer quelle direction doit avoir l'inéquation du quarré. Si SC est négatif, il faut qu'il soit plus petit en nombre que $2r\sqrt{r}$, pour que l'on ait en même temps $\begin{cases} SC < 2r\sqrt{r}. \\ SC > -2r\sqrt{r}. \end{cases}$ Ces deux inéquations répondent alors à $-2 < 3$ et $-2 > -3$. Pour élever la seconde au quarré, il faudra que je l'effectue, et je n'aurai toujours que la même inéquation au quarré $SC^2 < 4r^3$. Si SC est positif, la première répond à l'inéquation $2 < 3$, et la seconde à $2 > -3$; pour élever cette deuxième au quarré, il faudra l'effectuer, et j'aurai $2 < -(3)$, ou simplement $2 > 3$ qui est la même chose que la première; ainsi, dans tous les cas, je n'aurai qu'une seule inéquation au quarré.

75. Il s'agit maintenant de déterminer les changemens de direction des inéquations, quand l'équation contient des racines imaginaires. D'abord les deux racines peuvent être *Des racines imaginaires.*

imaginaires en vertu de la relation des deux premiers coëfficiens A et B : alors le radical originel $\sqrt{A^2-3B}$ ou $\sqrt{r}$ n'est plus réel, et les deux quasi-valeurs ϖ et φ appartiennent aux deux racines imaginaires; elles en forment, l'une et l'autre, la paire par leur forme $\varpi=\frac{1}{3}(A-2\sqrt{r})$ et $\varphi=\frac{1}{3}(A+2\sqrt{r})$. En ne les considérant plus que relativement à leur partie réelle, elles ne sont plus les deux racines extrêmes de l'équation, elles forment alors une paire de racines égales : et, en les additionnant, il reste pour l'autre racine $p \parallel \frac{1}{3}A$, dont on déterminera la direction.

76. Supposons que $\sqrt{A^2-3B}$ soit réel, les deux quasi-valeurs ϖ et φ seront réelles; mais il faudra alors que l'une des deux appartienne à une des deux racines imaginaires, et l'autre à la racine réelle : car, en les comparant ensemble, on a d'abord $\varpi \parallel \varphi$,

d'où........ $\frac{1}{3}(A-2\sqrt{r}) \parallel \frac{1}{3}(A+2\sqrt{2}$,

puis.................. $0 \parallel 4\sqrt{r}$.

Or le deuxième membre de cette dernière inéquation, qui répond à φ, est par sa nature positif, toutes les fois que $\sqrt{r}$ est réel, on a donc $0<4\sqrt{r}$ et par conséquent $\varpi<\varphi$: donc les parties réelles de ces deux quasi-valeurs

sont inégales ; donc les deux quasi-valeurs ϖ et φ ne peuvent plus faire la paire des deux racines imaginaires : car on a démontré que les racines imaginaires, d'une équation ne peuvent se trouver que sous la forme

$$x = a + b\sqrt{-1},\ x = a - b\sqrt{-1}:$$

donc il est nécessaire que l'une des deux quasi-valeurs originelles, appartienne à la racine réelle de l'équation.

77. Maintenant, en décomposant l'équation proposée en $(x^2+Px+Q)\ (x+p)$, les quasi-valeurs Π et Φ appartiennent à P de l'équation du deuxième degré, et ϖ et φ appartiennent à p : et c'est en vertu de l'inéquation $Q<\frac{1}{4}P^2$, qu'on a eu $p>\varpi$, $p<\varphi$, etc. Supposons maintenant que l'équation $x^2 + Px + Q = 0$ contienne les deux racines imaginaires, on aura alors $Q > \frac{1}{4}P^2$, et delà on aura $p_1 < \varpi$, si c'est la petite quasi-valeur qui est réelle, et $p_1 > \varphi$, si c'est la grande.

Il faut bien remarquer que ce n'est pas à la fois qu'on a deux inéquations, c'est l'une ou l'autre, selon que c'est la petite ou la grande quasi-valeur qui appartient à la racine réelle.

78. On peut encore déterminer une autre limite à la partie réelle des racines imaginaires;

car, dans ce cas, l'équation indéterminée

$$x^2 + Px + Q = 0$$

contient la racine réelle et l'autre racine imaginaire; ses deux facteurs sont donc de la forme

$$(x+a)(x+b \pm c\sqrt{-1}),$$

$$\text{ou}\ldots \left.\begin{cases} x^2 + (a+b)x + ab \\ \quad (\pm c\sqrt{-1})x \pm ac\sqrt{-1} \end{cases}\right\} = 0.$$

Or, en ne considérant cette équation que quant à sa partie réelle seulement, on a $Q < \frac{1}{4}P^2$. Donc la direction de la quasi-valeur ϖ ou φ qui en résulte, est la même que celle qui a lieu quand les racines sont réelles. Donc on a ces rapports d'inéquation,

$$p_1 \text{ réel}\ldots \begin{matrix} p_1 < \varpi. \\ p_2 \text{ et } p_3 \begin{cases} < \varphi \\ > \frac{1}{2}\Pi. \end{cases} \end{matrix} \ldots p_3 \text{ réel}\ldots \begin{matrix} p_1 \text{ et } p_2 \begin{cases} > \varpi. \\ < \frac{1}{2}\Phi. \end{cases} \\ p_3 > \varpi. \end{matrix}$$

79. Quant à la partie réelle des deux racines imaginaires, comme elle est égale dans toutes les deux, si la petite racine est réelle, on a $p_1 < \varpi$ pour la racine réelle, et $P > \Pi$ pour la partie réelle de la somme des deux imaginaires. On a donc pour chacune d'elles,

$$\left.\begin{matrix} p_2 \\ p_3 \end{matrix}\right\} > \tfrac{1}{2}\Pi = > \tfrac{1}{6}(A + \sqrt{r}).$$

Si c'est φ qui appartient à la racine réelle, on a par la même raison,

$$p_3 < \tfrac{1}{2}\varphi => \tfrac{1}{3}(A-\sqrt{r}).$$

80. Pour reconnaître maintenant laquelle des deux quasi-valeurs ϖ ou φ appartient à la racine réelle, j'ai pour le cas où p_1 est réel (77),

$$\left.\begin{array}{l}\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C > 0\\ \varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C > 0\end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l}SC - 2r\sqrt{r} > 0,\\ SC + 2r\sqrt{r} > 0.\end{array}\right.$$

Car dans le produit des trois coëfficiens $(\varpi - a)(\varpi - b)(\varpi - c) \parallel 0$, le premier facteur $\varpi - a$ est positif à cause de $p < \varpi$, et le produit des deux autres racines est toujours positif, parce qu'elles sont imaginaires. Le produit des trois facteurs ne doit donc cesser d'être positif, quoiqu'on fasse croître ϖ jusqu'à la valeur de φ.

Au contraire, si p_3 est réel, l'inéquation $p_3 > \varphi$ rend le facteur $\varphi - c$ négatif. Le produit des trois facteurs ne peut donc pas cesser de l'être. On a donc pour ce second cas,

$$\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C < 0 \ldots \quad SC - 2r\sqrt{r} < 0,$$
$$\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C < 0 \ldots \quad SC + 2r\sqrt{r} < 0.$$

81. Quand $\sqrt{A^2 - 3B}$ est imaginaire (je l'exprimerai par $\sqrt{-r}$.), on a alors, comme on l'a déjà vu, pour la racine réelle, $p \parallel \frac{1}{3}A$. J'appelle cette quasi-valeur ψ, d'où j'ai d'abord $\psi^3 - A\psi^2 + B\psi - C \parallel 0$, ou $-2A^3 + 9AB - 27C \parallel 0$,

ou $\mathcal{S}$C || o. Lors donc que $\mathcal{S}$C est positif, il faut que le facteur réel, quel qu'il soit, du produit $(⸸-a)(⸸-b)(⸸-c)$ soit positif. Il faut donc que l'on ait pour la racine réelle $p<\frac{1}{3}$A ou $p<⸸$; alors c'est la petite racine qui est la réelle; car la partie rationnelle des deux imaginaires est alors $>\frac{1}{3}$A, d'où l'on a cette règle

$$\mathcal{S}\text{C}>\text{o}\ldots\ p_1<\tfrac{1}{3}\text{A}\ldots\ \begin{matrix}p_2\\p_3\end{matrix}>\tfrac{1}{3}\text{A}.$$

Au contraire, quand on a SC$<$o, il faut que le facteur réel du produit $(⸸-a)(⸸-b)(⸸-c)$ soit négatif; il faut donc que l'on ait $p>⸸$ ou $p>\frac{1}{3}$A. Dans ce cas, ce sera donc la grande racine qui sera réelle. (Je ne considère ici grande et petite racine, que par rapport à la partie réelle des racines imaginaires.) On aura

$$\mathcal{S}\text{C}<\text{o}\ldots\ p_3>\tfrac{1}{3}\text{A}\ldots\ \begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}<\tfrac{1}{3}\text{A}.$$

82. On peut conclure que si $\mathcal{S}$C$=$o, on a pour la racine réelle et pour la partie réelle des deux autres $p=\frac{1}{3}$A.

La méthode des équations confond ces différens cas par la seule inéquation générale $4\text{A}^3-\text{A}^2\text{B}^2-$, etc. (71) $>$ o, qui apprend seulement que la proposée a deux racines imaginaires, et voilà tout.

83. Il s'agit de déterminer la direction de la quasi-valeur complète qui appartient à la racine

réelle. D'abord quand ϖ et φ sont réels, si c'est la petite racine p_1 qui est réelle, on a à cause de $p_1 < \varpi$, $P > \Pi$, d'où $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4}P^2 > \frac{1}{4}\Pi^2 \\ \frac{1}{4}P^2 < Q\end{matrix}\right.$; donc $Q > \frac{1}{4}\Pi^2$, d'où $p_1 < \frac{C}{\frac{1}{4}\Pi^2}$, ou $p_1 < \frac{C}{B - \Pi\varpi}$, ou enfin $p_1 < \frac{C}{\varpi^2 - A\varpi + B}$. Si c'est la grande racine qui est réelle, on a de $p_3 > \varphi$, $P < \Phi$, d'où $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4}P^2 < \frac{1}{4}\varphi^2 \\ \frac{1}{4}P^2 < Q\end{matrix}\right.$. Il y a encore la même incertitude que celle qui a lieu quand les trois racines sont réelles; ainsi j'aurai $p_3 \parallel \frac{C}{\varphi^2 - A\varphi + B}$.

La même chose a lieu avec $\sqrt{-r}$: car j'aurai, quand la petite racine est la réelle à cause de $p_1 < \psi$, $P > \Psi$; puis $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{4}P^2 > \frac{1}{4}\Psi^2 \\ \frac{1}{4}P^2 < Q\end{matrix}\right.$, d'où $Q < \frac{1}{4}\Psi^2$; puis $p_1 < \frac{C}{\frac{1}{4}\Psi^2}$, ou $p_1 < \frac{C}{B - \Psi\psi}$, ou enfin $p_1 < \frac{9C}{9B - 2A^2}$. La même incertitude a lieu pour la direction de $k\psi$ quand la grande racine est réelle, et l'on a

$$p_3 \parallel \frac{C}{B - \Psi\psi} \text{ ou } p \parallel \frac{9C}{9B - 2A^2}.$$

Toutes les loix de la direction des quasi-valeurs sont résumées dans le tableau ci-joint:

84. *Quand les trois racines sont réelles.*

$$\left.\begin{array}{l} SC-2r\sqrt{r}<0 \\ SC+2r\sqrt{r}>0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \ldots\ p_1>\varpi \ldots\ p_1>k\varpi \ldots\ \varpi<k\varpi. \\ \ldots\ p_3<\varphi \ldots\ p_3 \parallel k\varphi \ldots\ \varphi>k\varphi. \end{array}$$

Quand deux racines sont imaginaires.

$$\text{avec } \sqrt{r} \left\{ \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} SC-2r\sqrt{r}>0 \\ SC+2r\sqrt{r}>0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p_1<\varpi \ldots\ p_1<k\varpi \ldots\ \varpi>k\varpi. \\ \left.\begin{array}{l} p_2 \} >\frac{1}{2}\Pi \\ p_3 \} <\varphi \end{array}\right\} \text{. imaginaires.} \end{array} \\ \left\{\begin{array}{l} SC-2r\sqrt{r}<0 \\ SC+2r\sqrt{r}<0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p_1 \} <\frac{1}{2}\Phi \\ p_2 \} >\varpi \end{array}\right\} \text{. imaginaires.} \\ p_3>\varphi \ldots\ p_3 \parallel k\varphi \ldots\ \varphi<k\varphi. \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \sqrt{-r} \left\{ \begin{array}{l} SC>0 \ldots p_1<\psi \ldots \text{réelle} \ldots p_1<k\psi \ldots \psi>k\psi. \\ SC<0 \ldots p_3>\psi \ldots \text{réelle} \ldots p_3 \parallel k\psi \ldots \psi<k\psi. \end{array} \right.$$

On peut voir maintenant que toutes les directions qu'on vient d'exposer, se trouvent conformes à tous les exemples du tableau, page 178. On voit d'abord que les directions des quasi-valeurs originelles appartenant à des racines réelles ou imaginaires, ϖ, φ, ψ, sont toutes conformes aux loix qu'on vient de développer.

On peut voir que pour les sept premiers exemples, dont toutes les racines ont le même signe, on a constamment $p_1 > \varpi$ et $p_1 > k\varpi$, et pour les racines imaginaires $p_1 < \varpi$, $p_1 < k\varpi$, $p_1 < \psi$, $p_1 < k\psi$; et, qu'en général, il n'y a que

la quasi-valeur complète de la petite racine, qui ait une direction déterminée par une loi constante dans toutes les équations dont les racines ont le même signe, quoiqu'il s'y trouve des racines imaginaires, pourvu que la petite racine soit réelle.

Quant à la quasi-valeur complète de la grande racine $k\varphi$, on peut remarquer que dans le troisième exemple on a $p<\varphi$ et $p<k\varphi$, parce qu'on a, en même temps, $\Phi>\varphi$; dans les autres, depuis le premier jusqu'au septième, on a $p>k\varphi$, parce que l'on a $p_1>\Phi$.

On peut remarquer que dans les exemples cinq et six, où l'on a pour la petite quasi-valeur originelle $p_1>-4{,}68$, $p_1>-5{,}23$; ces quasi-valeurs deviennent positives, $p_1>0{,}209$, et $p_1>0{,}107$ quand elles sont complètes, et leur direction tend vers la vraie racine qui est $=1$ dans les deux exemples.

85. J'observe, en dernier lieu, que les exemples six et sept présentent une particularité remarquable : dans les autres exemples les valeurs de π et de φ ne donnent que les valeurs approchées des racines auxquelles elles correspondent ; tandis que dans le premier de ces deux exemples la valeur de φ est la valeur exacte de la grande racine $=20$; et dans le deuxième π donne exactement la valeur de la première

racine $=2$: cela vient de ce que ces deux équations ont deux racines égales. Pour en concevoir la raison, imaginons que les trois racines d'une équation soient égales, elles seront toutes $=\frac{1}{3}A$. S'il y en a seulement d'eux d'égales, l'inégalité de la troisième ne peut être considérée produite, que parce qu'elle aura pris à chacune des deux autres une quantité égale pour l'ajouter à la sienne, si elle est la plus grande, ou bien parce qu'elle aura retranché de sa valeur une quantité qu'elle aura partagée également entre les deux autres, si elle est la plus petite. Soit donc z la quantité ajoutée ou retranchée de chaque racine égale, on aura $p=\frac{1}{3}A\pm z$, $p=\frac{1}{3}A\pm z$ pour les deux racines égales et $p=\frac{1}{3}A\mp 2z$ pour la racine inégale. La somme des produits de ces trois valeurs multipliées deux à deux est, toute réduction faite, $=\frac{1}{3}A^2-3z^2$; or comme la somme de ces produits $=B$, on aura $A^2-9z^2=3B$; d'où $z=\frac{1}{3}\sqrt{A^2-3B}$: donc la racine inégale

$$p=\frac{1}{3}(A\mp 2\sqrt{A^2-3B}=\varpi \text{ ou } \varphi;$$

donc la valeur de ϖ ou de φ doit être exactement égale à la valeur de la racine inégale, et Π ou Φ à la somme des deux racines égales.

La même particularité a lieu pour les équations de tous les degrés qui ont toutes leurs

racines égales, moins une, et on le démontre par le même principe.

De la concentration directe.

86. Ce qu'on a dit jusqu'à présent n'a eu pour but que d'assigner les quasi-valeurs extrêmes de l'équation, et elles se trouvent encore quelquefois assez éloignées de la valeur des racines auxquelles elles correspondent. Il s'agit maintenant de les y faire aboutir. Je commence par le cas où les racines sont toutes réelles, et je suppose, en même temps, qu'elles sont du même signe.

Pour concentrer d'abord la petite quasi-valeur, on a, d'après le tableau ci-joint, $p_1 > \varpi$, $p_1 > k\varpi$ et $\varpi < k\varpi$, que je mets sous cette forme $\left\{\begin{matrix} \varpi < k\varpi \\ \wedge \quad \wedge \\ p_1 \quad p_1 \end{matrix}\right.$. Maintenant de $p_1 > k\varpi$ on a

$$k\varpi^3 - Ak\varpi^2 + Bk\varpi - C < 0,$$

d'où $k\varpi < \dfrac{C}{k\varpi^2 - Ak\varpi + B} = < \dfrac{C}{B - k\Pi\varpi}$, ou $k\varpi < k'\varpi$; de même que $\varpi < \dfrac{C}{B - \Pi\varpi}$ se transforme en $\varpi < k\varpi$.

En même temps la même inéquation $p_1 > k\varpi$ donne $P < k\Pi$, d'où $p_1 > \dfrac{C}{B - k\Pi\varpi}$, ou $p_1 > k'\varpi$;

par la même raison encore que $p_1 > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$ donne $p_1 > k\varpi$: donc on a

$$\begin{matrix} \varpi < & k\varpi < & k'\varpi \\ \wedge & \wedge & \wedge \\ p_1 & p_1 & p_1 \end{matrix}$$

De $p_1 > k'\varpi$ on a encore $k'\varpi^3 - Ak'\varpi^2 + Bk'\varpi - C < 0$, d'où $k'\varpi < \frac{C}{B - k'\Pi\varpi}$ ou $k'\varpi < k''\varpi$. Et de la même inéquation $p_1 > k'\varpi$, on a $P < k'\Pi$; puis $p_1 > \frac{C}{B - k\Pi\varpi}$, ou $p_1 > k''\varpi$.

On voit que, par le même raisonnement, on aura $k''\varpi < k'''\varpi$ et $p_1 > k'''\varpi$; et ainsi de suite : on aura donc la série suivante :

$$87.\quad \left.\begin{matrix} \varpi < & k\varpi < & k'\varpi < & k''\varpi < & k'''\varpi, \text{ etc.} \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge \\ p_1 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \end{matrix}\right\} = p_1.$$

Dans cette série les termes $k\varpi$, $k'\varpi$ etc. iront toujours en croissant ; mais la direction constante $p_1 > k\varpi$, $p_1 > k'\varpi$, etc. fait voir qu'ils n'atteindront jamais la valeur exacte de la petite racine, et qu'ils s'en approcheront toujours : de sorte que la limite de cette série sera la valeur de p_1.

Si l'on donnait à ϖ une augmentation de valeur qui la rendît plus grande que la petite racine p_1, on aurait d'abord (61), en appe-

lant ϖ', cette quasi-valeur $\underset{p_1}{\varpi' \vee} > \underset{p_1}{k\varpi'}$. Ensuite de l'inéquation $p_1 < \varpi'$, j'ai

$$k\varpi''^3 - A k\varpi'^2 + B k\varpi' - C > o;$$

puis.... $k\varpi' > \dfrac{C}{B - k\pi'\varpi'} = > k'\varpi'$.

De la même inéquation $p_1 < k\varpi'$, j'ai $P > k\pi'$; puis $k\pi'\varpi > Pp$, d'où $p_1 < \dfrac{C}{B - k\pi'\varpi'}$ en raisonnant de même pour les termes suivans, j'aurai encore la série convergente :

$$88.\quad \left.\underset{p_1}{\varpi' \vee} > \underset{p_1}{k\varpi' \vee} > \underset{p_1}{k'\varpi' \vee} > \underset{p_1}{k''\varpi' \vee} > \underset{p_1}{k'''\varpi' \vee},\ \text{etc.}\right\} = p_1,$$

qui aboutira encore à la valeur de p_1 par une direction contraire à la première.

89. J'aurai toujours cette série de concentration, tant que je donnerai à ϖ une valeur qui n'excédera pas la seconde racine de p_2. Supposons qu'on lui donne une valeur $\varpi'' > p_2$, alors on aura $\varpi''^3 - A\varpi''^2 + B\varpi'' - C < o$; car cette inéquation sera alors composée des trois facteurs $(\varpi'' - a)$ $(\varpi'' - b)$ $(\varpi'' - c)$, qui n'aura plus que le facteur $\varpi'' - c$ de négatif. On aura donc $\varpi'' < \dfrac{C}{B - \pi''\varpi''} = < k\varpi''$; de là si π'' continue d'être $> \varpi''$, avec $p_2 < \varpi''$ on aura $\pi''\varpi'' > Pp$,

d'où $p_2 < \frac{C}{B - n''\varpi''} = < k\varpi''$. On a donc ces rapports d'inéquation $\underset{\underset{p_2}{\vee}}{\varpi''} < \underset{\underset{p_2}{\vee}}{k\varpi''}$, dans lesquels on voit que la latitude de $p_2 < k\varpi''$ est plus grande que celle de $p_2 < \varpi$, et par conséquent $k\varpi''$ s'éloigne de la valeur au lieu de s'en rapprocher.

Si on continue cette série, on aura $k\varpi'' < k'\varpi''$, et toujours $p_2 < k'\varpi''$, par le même raisonnement qu'on vient de faire. On aura donc une série divergente, dont tous les termes en croissant aboutiront à p_2 de cette manière :

$$\left.\underset{\underset{p_2}{\vee}}{\varpi''} < \underset{\underset{p_2}{\vee}}{k\varpi''} < \underset{\underset{p_2}{\vee}}{k'\varpi''} < \underset{\underset{p_2}{\vee}}{k''\varpi''} < \underset{\underset{p_2}{\vee}}{k'''\varpi''}, \text{ etc.}\right\} = p_2.$$

Ainsi donc, si l'on donne à ϖ une valeur plus petite que p_1, il en résulte une série de concentration qui aboutit à p_1, et qui par conséquent s'éloigne de p_2. Et si ϖ acquiert une valeur plus grande que p_2, il en résulte une autre série de concentration qui aboutit à p_3 ; et qui s'éloigne par conséquent encore de p_2. De sorte que la seconde racine n'est pas susceptible de concentration.

90. Maintenant si on donne à ϖ''' une valeur qui la fasse dépasser la troisième racine p_3, on arrivera à la quasi-valeur de la dernière racine

$p_3 < \varphi$ qu'il s'agit de concentrer. On a vu que sa quasi-valeur complète a deux cas :

$$p_3 < k\varphi \ldots\ldots\ldots \text{ si } \Phi > \varphi,$$
$$p_3 > k\varphi \ldots\ldots\ldots \text{ si } \varphi < \Phi_3.$$

Je m'occupe d'abord du premier de ces deux cas. On a alors cet ensemble de rapports d'inéquation $\underset{p_3}{\overset{\vee}{\varphi}} > \underset{p_3}{\overset{\vee}{k\varphi}}$. Ensuite de $p_3 < k\varphi$, on a $k\varphi^3 - Ak\varphi^2 + Bk\varphi - C > 0$, d'où $k\varphi > k'\varphi$. De la même inéquation, on a $P > k\Phi$, d'où

$$p_3 < \frac{C}{B - k\Phi\varphi} = < K'\varphi.$$

On a donc la série de concentration

91. $$\left.\begin{matrix} \varphi > k\varphi > k'\varphi > k''\varphi > k'''\varphi, \text{ etc.} \\ \vee \quad\; \vee \quad\; \vee \quad\; \vee \quad\; \vee \\ p_3 \quad p_3 \quad p_3 \quad p_3 \quad p_3 \;\ldots \end{matrix}\right\} = p_3,$$

dans laquelle les termes se rapprocheront de plus en plus de p_3, et aboutiront à sa valeur.

Supposons que l'on donne à φ une valeur φ' qui soit plus petite que la troisième racine p_3, on aura en conséquence $p_3 > \varphi$, et de là $\varphi'^3 - A\varphi'^2 + B\varphi' - C < 0$, parce que des trois facteurs $(\varphi' - a)\,(\varphi' - b)\,(\varphi' - c)$ dont est composée cette inéquation, le dernier $\varphi' - c$ est alors négatif. On aura donc $\varphi' < k\varphi'$. Ensuite de $p_3 > \varphi'$, on a $P < \Phi'$, $\Phi'\varphi' < Pp$; puis $p_3 > \dfrac{C}{B - \Phi'\varphi'} = > k\varphi'$.

On aura donc $\underset{\underset{p_3}{\wedge}}{\varphi'} < \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k\varphi'}$, et de ces rapports d'iné-quation, on trouvera par le même raisonnement la série de concentration

$$92.\quad \left.\underset{\underset{p_3}{\wedge}}{\varphi'} < \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k\varphi'} < \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k'\varphi'} < \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k''\varphi'} < \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k'''\varphi}, \text{ etc.}\right\} p_3.$$

Ainsi l'on voit que la troisième racine peut être concentrée par deux séries de concentration opposées, qui aboutissent toutes les deux à la valeur de la racine comme la première.

93. Si l'équation avait quatre racines, on verrait que la quatrième aurait deux séries de concentration divergentes opposées l'une à l'autre comme la seconde ; c'est une suite nécessaire de la concentration convergente de la troisième racine. Si l'équation avait cinq racines, la cinquième aurait par cette raison une double série convergente de concentration, et ainsi de suite, comme on le verra ci-après.

94. On suppose dans cette théorie que la somme des deux racines P est plus grande que la troisième racine p_3. Mais si le contraire avait lieu ; et si l'on avait $\Phi < p_3$, dans ce second cas, on a $p_3 < \varphi$ et $p_3 > k\varphi$; on a donc à plus forte raison $\varphi < k\varphi$; mais alors $k\varphi$ a dépassé la valeur de p_3, et la latitude de $\varphi < k\varphi$ est égale à la somme des latitudes de $p_3 < \varphi$ et $p_3 > k\varphi$; il ne

peut donc en résulter qu'une série divergente et vague dont je ne m'occuperai pas.

95. On voit d'abord que quand toutes les racines sont du même signe, il n'y a que la petite racine qui puisse toujours se concentrer, parce qu'on a toujours $P > p_1$ et $\pi > \varpi$. Mais quand les racines sont de différens signes, alors la relation de P à p_1 peut varier d'une infinité de manières; et l'anomalie qui en résulte, peut se porter sur toutes les racines. Au reste, on ne considère dans cette section que les équations dont toutes les racines ont le même signe.

96. On voit que quand il y a des racines imaginaires, ce n'est toujours que la petite quasi-valeur ϖ ou ψ qui puisse se compléter d'une manière invariable lorsqu'elle est réelle: c'est aussi la seule qui puisse se concentrer. En effet, je considère le cas où ϖ ou φ est réel. Si c'est ϖ qui correspond à la racine réelle, on a d'abord ce rapport d'inéquation (84) $\underset{\underset{p_1}{\vee}}{\varpi} \rhd \underset{\underset{p_1}{\vee}}{k\varpi}$,

en vertu duquel on aura encore la série

$$\left.\underset{\underset{p_1}{\vee}}{\varpi} > \underset{\underset{p_1}{\vee}}{k\varpi} > \underset{\underset{p_1}{\vee}}{k'\varpi} > \underset{\underset{p_1}{\vee}}{k''\varpi}, \text{ etc.}\right\} = p_1$$

Comme on a eu ci-dessus la même en ϖ (87), le raisonnement est le même. Et si dans ce cas on donnait à ϖ une valeur ϖ' qui fût moindre

que p_1, on aurait encore par le même raisonnement la série contraire,

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\underset{p_1}{\wedge}}{\varpi} > \underset{\underset{p_1}{\wedge}}{k\varpi'} > \underset{\underset{p_1}{\wedge}}{k'\varpi'} > \underset{\underset{p_1}{\wedge}}{k''\varpi'} > \underset{\underset{p_1}{\wedge}}{k'''\varpi'}, \text{ etc.}\end{array}\right\} = p,$$

qui convergerait également vers la petite racine. Ainsi ces deux séries de concentration seraient dans un ordre inverse de celui qui a lieu quand les trois racines sont réelles (87) (88).

La même chose aurait lieu si c'était φ qui correspondît à la racine réelle. Si l'on a $\Phi > \varphi$, il en résulte les rapports d'inéquation $\underset{\underset{p_3}{\wedge}}{\Phi} < \underset{\underset{p}{\wedge}}{k\varphi}$, d'où résulte la série

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\underset{p_3}{\wedge}}{\varphi} > \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k\varphi} > \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k'\varphi} > \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k''\varphi} > \underset{\underset{p_3}{\wedge}}{k'''\varphi}, \text{ etc.}\end{array}\right\} = p.$$

Et si l'on donnait à φ une valeur φ' qui surpassât p_3, on aurait une autre série contraire, comme pour ϖ, et ces deux séries convergentes seraient inverses de celles qui ont lieu quand les trois racines sont réelles (91) (92).

Si $\Phi < p_3$, on a $p > \varphi$, $p_3 < k\varphi$, d'où l'on ne peut avoir une série de concentration, comme ci-dessus (94), mais seulement deux limites opposées entre lesquelles se trouve la racine.

97. Si le radical originel est imaginaire, la même chose a encore lieu. Si c'est la petite racine qui est réelle, on a $p < \frac{1}{3}A$ ou $p < \frac{1}{4}$ (84).

C'est le cas où $SC > o$; on a alors $\underset{p_1}{\underset{\vee}{\psi}} > \underset{p}{\underset{\vee}{k\psi}}$,

d'où l'on tire encore la série convergente

$$98.\quad \left.\underset{p_1}{\underset{\vee}{\psi}} > \underset{p_1}{\underset{\vee}{k\psi}} > \underset{p_1}{\underset{\vee}{k'\psi}} > \underset{p_1}{\underset{\vee}{k''\psi}} > \underset{p_1}{\underset{\vee}{k'''\psi}}, \text{ etc.}\right\} = p_1.$$

Si l'on donnait à ψ une valeur ψ' plus petite que p_1, on aurait encore une autre série qui convergerait dans un sens opposé, comme ϖ.

En deuxième lieu, si l'on a $SC < o$, et en conséquence $p > \frac{1}{3}A$ ou $p_3 > \psi$. D'abord si l'on a $P > p_3$, à cause de $\begin{matrix} p_3 > \psi \\ p_3 < P \end{matrix}$, on a $P > \psi$; puis à cause de $p_3 > \psi$, on a $P < \Psi$: donc Ψ est trop grand et ψ trop petit; d'où $\Psi\psi < Pp$ (82); puis $Q < B - \Psi\psi$; enfin $p_3 > \frac{C}{B - \Psi\psi} => k\psi$.

Ensuite de $p_3 > \psi$, on a $\psi^3 - A\psi^2 + B\psi - C < o$, d'où $\psi < k\psi$: on a donc les rapports d'inéquation $\underset{p_3}{\underset{\wedge}{\psi}} < \underset{p_3}{\underset{\wedge}{k\psi}}$; desquelles on conclura la série convergente.

$$99.\quad \left.\underset{p_3}{\underset{\wedge}{\psi}} < \underset{p_3}{\underset{\wedge}{k\psi}} < \underset{p_3}{\underset{\wedge}{k'\psi}} < \underset{p_3}{\underset{\wedge}{k''\psi}} < \underset{p_3}{\underset{\wedge}{k'''\psi}}, \text{etc.}\right\} = p_3.$$

Et l'on aurait de même une autre série de concentration, en sens contraire, si l'on donnait à ψ une valeur $\psi' > p_3$.

En deuxième lieu, si $P < p_3$, on aura une série de concentration divergente, comme ci-dessus, par rapport à φ (94).

100. Je ne m'occuperai pas ici de la concentration de la partie réelle des deux quasi-valeurs qui répondent aux deux racines imaginaires ; on verra ci-après comment on peut y parvenir.

On voit donc que dans toute équation, dont les racines ont le même signe, la petite quasi-valeur est la seule qui puisse se concentrer d'une manière invariable, pourvu qu'elle soit réelle, soit que l'équation ne contienne que des racines réelles, soit qu'elle en contienne d'imaginaires. C'est aussi de celle-là seule dont on fera usage dans le calcul des inéquations et à l'aide de laquelle on parviendra à trouver toutes les racines de l'équation.

Quand les racines sont toutes négatives, c'est la petite quasi-valeur ϖ; et quand elles sont toutes positives, c'est la quasi-valeur φ qui se trouve alors la plus petite. Quand toutes les racines n'ont pas le même signe, cette règle générale n'a plus lieu ; mais on verra dans le deuxième mode de solution comment on parvient généralement à concentrer les quasi-valeurs ϖ et φ, quel que soit le signe des différentes racines.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer, relativement à la concentration de la grande quasi-valeur, n'ont pour but que de développer la théorie du calcul des inéquations et pour faire voir que les anomalies qu'il semble présenter dans ses résultats sont soumises à des loix.

L'anomalie, qui a lieu ici, dépend de la relation de P à p, et quand les racines sont de différens signes, cette anomalie peut avoir lieu relativement à toutes les racines. Voilà pourquoi, de tout ce qui précède, j'extrais seulement cette règle générale.

101. *Dans l'équation générale du troisième degré* $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, *la petite quasi-valeur* ϖ, *si elle répond à une racine réelle, est la seule susceptible de se concentrer par une loi invariable, si toutes les racines sont négatives, et quand elles sont toutes positives, c'est la quasi-valeur* φ *qui a cette propriété.* Règle générale de concentration.

On verra que cette loi s'applique aux équations de tous les degrés.

102. Il s'agit de confirmer ce que je viens de dire par des exemples. Je prends le premier du tableau, j'ai, en opérant toujours par la formule générale, $p, > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$.

$\varpi = 0,8453$
$k\ \varpi = 0,903$
$k''\ \varpi = 0,96$
$k'''\varpi = 0,973$
etc.

A proportion que l'on concentre, on se rapproche plus lentement de la valeur (on verra ci-après les moyens de s'en rapprocher plus rapidement). En attendant on peut arriver assez promptement à la racine à l'aide de cette première méthode.

Au lieu de continuer la concentration avec le nombre précis que j'obtiens, je complète la dernière ou l'avant-dernière décimale ; je suis sûr que, si par cette opération j'ai franchi la valeur de la racine, j'obtiendrai par la concentration une valeur plus petite que celle que j'avais prise, et qui me ramenera, en sens contraire, à la valeur de la racine, comme on peut le conclure d'après les séries de concentration opposées (87) (88). Dans ce cas-ci, si je complétais l'avant-dernière décimale, j'arriverais à la vraie valeur $=1$; je franchis à dessein cette valeur, et je fais $k\varpi' = 1,1$, j'obtiens par la concentration $k'\varpi' = 1,06$; comme cette valeur est plus petite que $k\varpi$, je conclus que j'ai franchi la limite de la valeur. Par ce moyen j'ai obtenu artificiellement une limite opposée à la première.

On peut observer que cette deuxième limite n'est prise que par tâtonnement, je l'emploie

ici provisoirement : dans la section suivante on obtiendra, par une formule algébrique, une valeur de x qui donnera une limite opposée à la limite $p > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$ qu'on a obtenue dans cette section.

103. Maintenant, à l'aide des deux limites opposées que je me suis procurées, je puis parvenir au centre de la valeur par deux moyens. Le premier est appuyé sur cette propriété des séries de concentration ; savoir, que plus on approche de la valeur, plus les pas de concentration sont petits : cela posé en comparant $k''\varpi = 0{,}96$ avec $k'''\varpi = 0{,}973$, j'ai pour différence 0,013 ; c'est le pas de concentration. Et en comparant la valeur excédante $k\varpi' = 1{,}1$ avec $k'\varpi' = 1{,}06$, le pas de concentration $= 0{,}04$ qui est plus grand que l'autre ; cette limite est donc plus loin de la vraie valeur ; je la concentre et j'ai $k''\varpi' = 1{,}027$; j'ai alors pour différence entre ces deux dernières 0,013, qui est la même que celle de $k''\varpi$ à $k'''\varpi$; j'ai donc $k'''\varpi$ et $k''\varpi'$ à égale distance de la racine, je les additionne et j'en prends la moitié, ce qui me donne la valeur de la racine $= 1$.

104. Par la deuxième méthode j'additionne immédiatement les deux limites opposées,

0,973 avec $k'\varpi' = 1,06$ que j'ai par une première concentration ; j'ai pour quasi-valeur moyenne 1,03 ; j'ignore si elle est en-deçà ou au-delà de la racine ; mais en la concentrant j'obtiens 1,02 ; je conclus que je suis au-delà ; j'additionne encore cette dernière quasi-valeur avec la limite opposée $k''\varpi = 0,973$, j'ai pour quasi-valeur moyenne 0,997, je la concentre encore et j'obtiens la quasi-valeur 0,9995. On voit avec quelle rapidité on concentre encore par ce moyen.

Il en est de même des autres exemples dans lesquels les racines ont le même signe, on peut toujours concentrer, de la même manière, la petite quasi-valeur, pourvu que la petite racine soit réelle, que les autres soient d'ailleurs réelles ou imaginaires. Je prends l'exemple vingtième du tableau, dans lequel on a $\sqrt{-r}$. L'inéquation de condition $SC > 0$ apprend que c'est la petite racine qui est réelle, on a alors $p_1 < \psi$, puis

$\psi = 1,6$
$k\psi = 1,2$
$k'\psi = 1,07$
} Les différens de la concentration tendent à la valeur 1, qui est celle de la racine. Je me procure encore à dessein une limite opposée, et je fais $k\psi'$ 0,9, j'ai $k'\psi' = 0,96$. En opérant comme ci-dessus, entre cette limite trop petite et la limite trop

grande $k'\psi = 1{,}07$, on parviendra plus rapidement à la racine.

Pour faire voir que la grande quasi-valeur se concentre également dans le cas où l'on a $p_3 < P$, je prends l'exemple 15 du tableau qui donne $SC \mp 2r\sqrt{r} < 0$, et qui par conséquent n'a que la grande racine de réelle, et sa quasi-valeur réelle est $p_3 > \varphi = > 5{,}6666$; et comme on a $\Phi = 7{,}3333 = > \varphi_3$, cette quasi-valeur est susceptible de se concentrer, et l'on a

$\varphi = 5{,}666$ $k\,\varphi = 5{,}802$ $k'\varphi = 5{,}89$ $k''\varphi = 5{,}95$	Les différens termes tendent à la valeur de la racine qui est $= 6$. On peut se faire encore une limite opposée, et aboutir plutôt

à cette valeur.

Je prendrai encore l'exemple 19 où le radical originel est imaginaire; et comme on a $SC < 0$, il s'ensuit que c'est la grande racine qui est la réelle. On a donc $p_3 > \psi = > 3{,}333$. En la concentrant, j'ai

$\psi = 3{,}333$ $k\,\psi = 3{,}396$ $k'\psi = 3{,}46$ $k''\psi = 3{,}52$	Cette progresssion toujours croissante et dont les termes diffèrent entr'eux de moins en moins, c'est ce qui me fait conclure qu'elle est susceptible de concentration.

Lorsque $p_3 > P$, la quasi-valeur que l'on obtient franchit la valeur de la racine dans toute espèce d'équation, comme on l'a vu. Si

l'on concentre ces espèces de quasi-valeurs, il en doit résulter une série divergente et vague. Je prends l'exemple 13 du tableau qui donne $\delta C \mp 2r\sqrt{r} < 0$, d'où je conclus que la grande racine est réelle; j'ai donc $p > \varphi = > 19,8734$. Et comme dans cet exemple $\Phi = 14,1266$, j'ai $\varphi > \Phi$, la concentration ne peut avoir lieu, et en concentrant, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = 19,8734 \\ k\varphi = 20,2598 \\ k'\varphi = 16,2263 \\ k''\varphi = 19,37 \end{array}\right\}$$

On voit que les deux termes qui approchent le plus de la racine qui est $= 20$, sont φ et $k\varphi$, et que les autres s'en éloignent, puis s'en rapprochent, puis s'en éloignent par des loix qui varient à raison du rapport de P à p_3, et qu'il est parfaitement inutile de discuter.

De la concentration de compensation.

105. Cependant à l'aide des deux quasi-valeurs opposées φ et $k\varphi$, on peut aisément parvenir à la racine par le moyen suivant, que j'appliquerai seulement au cas où le radical originel est imaginaire, parce qu'il dispense d'un plus long calcul. Je l'appelle *concentration de compensation* Je prends l'exemple 18 du tableau où l'on a $\delta C < 0$; d'où je conclus que la grande racine est réelle; j'ai donc $p_3 > \psi = > 0,6667$. Pour savoir si j'ai $p_3 > \psi$ ou $p_3 > \frac{1}{3}A$, je concentre ψ, et j'ai

$\psi = 0,6667$ $k\psi = 2,425$ $k'\psi = 3,3195$ $k''\psi = 1,567$	On voit que cette série divague, j'ai d'abord $k\psi > \frac{2}{3}A = > 1,333$; le terme suivant augmente;

puis celui que j'obtiens après diminue. Je conclus que la valeur est entre ψ et $k\psi$. J'additionne ces deux quasi-valeurs, et j'en prends la moitié, qui me donne la quasi-valeur moyenne $\mu = 1,5458$; je la concentre toujours par la formule $p > \frac{C}{B - \Pi\varpi}$, qui est ici $p > \frac{C}{B - M\mu}$; j'ai $k\mu = 2,3266$. J'en prends de même la quasi-valeur moyenne entre μ et $k\mu$, que je concentre de même, et j'ai $k'\mu$; je prends la quasi-valeur moyenne entre $k\mu$ et $k'\mu$, et ainsi de suite, comme on voit.

$\psi = 0,6667$							
	1,5458						$= \mu$.
$k\psi = 2,425$							
		1,9362					$= \mu'$.
$k\mu$	2,3226						
			2,0047				$= \mu''$.
$k'\mu'$		2,0735					
				2,0004			$= \mu'''$.
$k''\mu''$			1,9962				
					2,00004		$= \mu^{IV}$.
$k\mu'''$				1,99968			

On voit qu'il est inutile de prolonger cette espèce de série plus loin, et que la racine est $p_1 = 2$.

106. Il faut bien remarquer maintenant que cette méthode ne peut avoir lieu que lorsque les racines sont du même signe, ainsi que les

méthodes précédentes. Mais lorsqu'il y a des racines imaginaires, on ne peut pas conclure que toutes les racines sont du même signe, quant à leur partie réelle, lorsque les coëfficiens de la proposée sont ou tous positifs ou alternativement positifs et négatifs. Par exemple l'équation $x^3+2x^2+2x+15=0$ annonce par ses coëfficiens, tous positifs, que les trois racines sont négatives; elle est néanmoins composée des deux facteurs $(x+3)(x^2-x+5)$, dans lesquels la partie réelle des deux racines imaginaires est positive. Le radical originel dans cette équation est imaginaire, et la racine réelle est la plus grande. Dans cet exemple, si l'on emploie la méthode ci-dessus, au lieu d'aboutir à la vraie racine, on aura une série qui s'en écartera et qui divaguera, comme cela a lieu dans toutes les équations dont les racines ou les parties réelles des racines ont des signes différens.

Mais maintenant les méthodes qu'on vient de développer suffisent pour résoudre les équations dont les racines ont des signes différens; il suffit pour cela de donner à l'équation une préparation qui rende toutes ses racines du même signe; elle consiste seulement à faire $x=y+a$, en donnant à la quantité a une valeur telle, que la substitution de $y+a$ dans

l'équation rende tous ses coëfficiens positifs. Si les trois racines sont réelles, elles deviendront toutes trois négatives. Et si les coëfficiens étant tous positifs, elle contient des racines imaginaires qui, par leur composition, rendent tous les coëfficiens positifs, quoiqu'il y ait des valeurs positives dans l'équation, comme dans le dernier exemple, alors il faudra donner à la quantité a, dans la substitution de $y+a$, une valeur telle, que la concentration alternative puisse converger vers la racine.

Par exemple, si j'ai une équation composée des facteurs $(x-3)(x-1)(x+2)$; en faisant $x=y+4$, cette substitution donnera une équation dont les trois facteurs seront $(y+1)(y+3)(y+6)=0$, et la quasi-valeur ϖ qui correspondait à la première racine $x=+3$, correspond à la première racine, qui est la plus petite $x=-1$. Et dans l'exemple ci-dessus, dont les deux facteurs sont $(x+3)(x^2-x+5)=0$, si je fais $x=y+2$, ils deviendront $(y+6).(y^2+2y+5)=0$ ou $y^3+8y^2+17y+30=0$, et la valeur réelle de cette équation pourra se concentrer par la méthode alternative ci-dessus.

Je ne déterminerai pas quel est le *minimum* de la valeur qu'il faut donner à la quantité a

pour obtenir ces résultats ; cette détermination est parfaitement inutile. Et tout ce que je viens de dire ici relativement à la concentration de la grande quasi-valeur, n'a eu pour but que de développer les ressources du calcul des inéquations. On voit que la méthode de la résolution en p, qui ne fait que la première partie du premier mode de solution, suffit pour résoudre toute espèce d'équations. Il en résulte seulement des discussions pour les différens cas, et des opérations de calcul dont on est dispensé dans le second mode de solution qu'on développera ci-après ; il ne restera plus à faire usage que de la loi de concentration (101) qui appartient aux équations dont les racines ont toutes le même signe.

Il reste à développer une autre loi invariable de concentration qui appartient aux équations dont les racines n'ont pas le même signe, et dont on fait usage dans le second mode de solution pour la concentration dans les équations qui contiennent des racines imaginaires ; la voici :

107. *Quand toutes les racines sont positives en p ou négatives en x, excepté la première, sa quasi-valeur ϖ peut se concentrer par une série alternative et convergente si elle est la plus petite quasi-valeur en nombre, et quand*

toutes les racines sont négatives en p ou positives en x, la quasi-valeur φ peut également se concentrer pourvu qu'elle soit aussi la plus petite en nombre.

Pour le faire voir, en reprenant les deux inéquations originelles $p_1 > \varpi$, $P < \Pi$, la première étant pronégative équivaut à $p_1 = - < \varpi$, en la rendant métanégative ; de sorte que Π et ϖ sont tous les deux trop grands, et par conséquent on a $\Pi\varpi > Pp_1$ à raison des deux facteurs. Cela posé dans l'équation $Q = B - Pp$, comparée avec l'inéquation $Q \parallel B - \Pi\varpi$, si on fait ressortir le signe négatif de ϖ, on aura dans ce cas-ci $Q < B + \Pi\varpi$, et par conséquent $p_1 = - > \dfrac{C}{B + \Pi\varpi}$; (en faisant ressortir le signe de C et en considérant les termes de cette inéquation indépendamment de leur signe négatif) ; d'où $p = - > k\varpi$ qu'on peut encore exprimer par $p_1 > -(k\varpi)$. Ensuite de cette inéquation et de l'autre opposée $p = - < \varpi$ ou $p < -(\varpi)$, on en conclut cet ensemble de rapports d'inéquations métanégatives

$$\underset{\underset{p_1}{\vee}}{-(\varpi)} > \underset{\underset{p_1}{\wedge}}{-(k\varpi)}.$$

Maintenant de $p_1 = - > k\varpi$ on a aussi $P > k\Pi$, car si $k\varpi$ était intrinséquement négatif, on au-

rait $p<k\varpi$, et par conséquent $P>k\Pi$, et en ne considérant ces deux quasi-valeurs que comme des nombres indépendamment de leur signe, puisque $k\varpi$ est trop petit, il faut que $k\Pi$ soit aussi trop petit de la même quantité, pour avoir $\Pi-k\varpi=A$, comme on a $P+p=A$. A est la différence de P à p comme de $k\Pi$ à $k\varpi$; il s'ensuit que l'on a $k\Pi\varpi<Pp$ à raison de ses deux facteurs, d'où $Q>B+k\Pi\varpi$,

d'où $p_1=-<\dfrac{C}{B+k\Pi\varpi}$ ou $p_1=-<k'\varpi$.

Ensuite de cette dernière inéquation que je fais $p<-(k\varpi)$, et de la précédente $p>-(k\varpi)$ on obtient

$$\underset{p_1}{-(\varpi)>}-\underset{p_1}{(k\varpi)<}-\underset{p_1}{(k'\varpi)<}-$$

En continuant le même raisonnement pour les termes suivans, on aura une série alternative de concentration; c'est-à-dire que tous les termes iront alternativement en-deçà et au-delà de la valeur de la racine p_1. J'exprimerai cette série de la manière suivante, en mettant hors de la parenthèse commune le signe négatif de tous les termes qu'on a fait ressortir de leur valeur intrinsèque, et qu'on a rendus métanégatifs:

108. $-\left.\left(\begin{array}{cccccc} \varpi > & k\varpi < & k'\varpi > & k''\varpi < & k'''\varpi > & k^{iv}\varpi, \text{etc.} \\ \vee & \vee & \vee & \wedge & \vee & \wedge \\ p_1 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \end{array}\right)\right\} = p_1$

Cette série se décompose en ces deux parties,

$$-(\pi < k'\pi < k'''\pi < k^{v}\pi, \text{etc.}) - (k\pi > k''\pi > k^{iv}\pi > k^{vi}\pi, \text{etc.})$$

Or maintenant ces deux parties, ou plutôt ces deux séries, sont les mêmes que les deux opposées en π et π' (87 et 88), dans lesquelles on aurait supprimé tous les termes intermédiaires ; or ces deux séries n'en seraient pas moins convergentes vers la petite racine, si π et $k\pi$ étaient des quasi-valeurs, les plus petites de l'équation ; il en est de même de celles-ci ; c'est-à-dire qu'on a alors deux séries convergentes de concentration, l'une au-dessus de la valeur de la racine et l'autre au-dessous.

Si toutes les racines étaient négatives en p, excepté la dernière qui correspond à φ, on ferait le même raisonnement pour la concentration de φ que celui qu'on a fait pour celle de ϖ ; c'est-à-dire qu'on n'aurait une série de concentration alternative et convergente qu'autant que φ serait la plus petite des quasi-valeurs de l'équation.

109. Il est aisé de connaître quand l'un ou l'autre de ces deux cas ont lieu par la forme de l'équation proposée ou par la nature de ses coëfficiens. Je commence par la quasi-valeur ϖ.

Si cette quasi-valeur, qui est la plus petite, est seule négative en p, il faudra d'abord que le coëfficient A qui exprime la somme des racines soit positif. Je dis que B doit l'être également. Car Φ qui contient la somme des quasi-valeurs des plus petites racines doit alors être positif; or, son expression est $=\frac{A-\sqrt{A^2-3B}}{3}$. Il faut donc que l'on ait $A>\sqrt{A^2-3B}$, d'où $0>-3B$ ou $B>0$. Quant au coëfficient C, comme il n'y a qu'une seule racine négative en p, il doit être négatif. Donc lorsque la proposée aura la forme $x^3+Ax^2+Bx-C=0$, il faudra conclure qu'elle n'a qu'une racine positive en x, qui est la première, et qu'elle est susceptible de concentration.

Si l'on fait maintenant $x=-y$, on aura l'équation $y^3-Ay^2+By+C=0$. Dans ce cas, la quasi-valeur ϖ deviendra φ, qui sera la seule quasi-valeur positive en p, ou négative en x, et elle sera la plus petite des quasi-valeurs. Donc lorsque la proposée aura la forme

$$x^3-Ax^2+Bx+C=0,$$

il faudra conclure que φ est la plus petite quasi-valeur en nombre, et qu'elle est par conséquent susceptible de concentration.

110. Il faut bien remarquer que pour que

la concentration puisse s'effectuer par une série, il ne suffit pas que la racine qui est d'un signe différent des autres, soit la plus petite en nombre ; il faut que sa quasi-valeur soit la plus petite des quasi-valeurs de l'équation ; il faut par conséquent que Φ soit positif quand elle est la seule négative ; il faut que B soit positif.

Il s'agit de confirmer tout ceci par des exemples. Je prends l'exemple 10 du tableau, qui est composé d'avance des facteurs $(x-1)(x+4)(x+5)$; on voit que dans cette équation le coëfficient C est seul négatif. On a pour la première quasi-valeur,

$$\left.\begin{array}{l}\pi=-1,0452\\ k\pi=-0,9778\\ k'\pi=-1,0112\\ k''\pi=-0,9944\end{array}\right\}$$

On voit que l'on a la série alternative de termes pronégatifs $p_1 > \pi$, $p_1 < k\pi$, $p_1 > k'\pi$, etc. en en faisant ressortir le signe, on a la série des termes métanégatifs $p - < \pi$, $p - > k\pi$, etc.

Je prends l'exemple onzième du tableau, dont les facteurs sont $(x-4)(x-3)(x+1)$, il a la forme $x^3-Ax^2+Bx+C=0$. C'est donc φ qui est susceptible de concentration, et j'ai

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=1,055\\ k\varphi=0,9644\\ k'\varphi=1,0242\end{array}\right\}$$

On voit que les termes vont alternativement au-delà et en-deçà de la racine $=1$ et qu'ils s'en approchent successivement.

La concentration de compensation, qu'il est nécessaire d'employer seulement pour les séries alternatives divergentes, accélère, dans ce cas-ci, la marche de la série de concentration; car on a

$\varphi = 1{,}055$	1,099			
$k\varphi = 0{,}9644$		1,0015		.... μ
$k\mu$ 0994			1,00025	.... μ'
$k\mu'$ 0,999				μ''

Je prends enfin, pour dernier exemple, le douzième du tableau, dont les facteurs sont $(x-3)(x+4)(x+5)$, elle a la forme $x^3 + Ax^2 - Bx - C = 0$, et quoique la première racine soit la plus petite en nombre, néanmoins sa quasi-valeur π n'est pas la plus petite de toutes les quasi-valeurs de la proposée, à cause que B étant négatif, il en résulte que Φ est négatif également; alors elle n'est susceptible que d'une concentration divergente. En effet on a

$\pi = -3{,}03$
$k\pi = -2{,}809$
$k'\pi = -3{,}3813$
$k''\pi = -2{,}427$

On voit que cette série diverge en s'éloignant alternativement de la racine $= 3$; néanmoins, par la série de compensation, on parviendrait à cette valeur à l'aide des deux premiers termes π et $k\pi$.

On voit, en général, que la série de con-

centration ne s'applique invariablement qu'à la quasi-valeur de la petite racine dans les équations dont les racines ont le même signe, et qu'elle s'étend encore dans le domaine des équations, dont une des racines a un signe différent des autres, pourvu que la quasi-valeur de cette racine soit la plus petite des quasi-valeurs de l'équation. Telle est sa limite, au-delà de laquelle la concentration ne présente que des séries divergentes et vagues. Mais, comme on le verra, cette loi générale suffit pour concentrer les quasi-valeurs de toute espèce d'équation.

De la résolution des valeurs de x, ou deuxième méthode de solution simple.

111. Cette partie consiste à résoudre l'équation

$$x^2 + Px + Q = 0.$$

Cette équation est susceptible de deux solutions, la première en exprimant P et Q en fonctions de Φ et de φ; la deuxième en l'exprimant en fonctions de Π et π.

$$\text{J'ai} \left\{ \begin{array}{l} P > \Phi \ldots\ldots \\ P = -\dfrac{x^2 - Q}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où} \\ \text{puis} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Phi < -\dfrac{x^2 - 2}{x} \\ Q < -x^2 - \Phi x. \end{array} \right.$$

puis, à cause de $p < \varphi$, j'ai $Q > \frac{C}{\varphi}$.

Ensuite des deux inéquations opposées de Q, j'obtiens l'inéquation $\frac{C}{\varphi} < -x^2 - \Phi x$; d'où enfin j'ai l'inéquation du deuxième degré,

$$x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} < 0.$$

Je puis résoudre la même équation en employant Π et π ; comme ces quasi-valeurs ont une direction contraire à celle de Φ et de φ, j'obtiendrai, en faisant les mêmes opérations, cette autre inéquation,

$$x^2 + \Pi x + \frac{C}{\pi} > 0.$$

Or, je dis maintenant que la résolution de ces deux inéquations donne la double formule suivante, des trois racines de la proposée, en appelant x_1, x_2, x_3, ses trois valeurs successives,

112. De l'inéquation en Φ. ...... De l'inéquation en Π.

$$x_1 = - < \tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}} \;\ldots\ldots\; x_3 = - < \tfrac{1}{2}\Pi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}}.$$

$$x_2 = - > \tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}} \;\ldots\ldots\; x_2 = - > \tfrac{1}{2}\Pi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}}.$$

$$x_3 = - < \varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1 = - > \pi.$$

Il s'agit de démontrer les différentes parties de cette double formule.

113. 1°. Dans l'inéquation $x^2+\Phi x+\frac{C}{\varphi}<0$ le coëfficient Φ est plus petit que la somme des deux plus petites, ou des deux premières racines, à cause de $P>\Phi$; et le dernier terme $\frac{C}{\varphi}$ est le produit C des trois racines divisé par une quantité plus grande que la troisième racine : ce quotient est donc plus petit que le produit des deux petites racines. Les deux quasi-valeurs de cette inéquation doivent donc appartenir aux deux premières racines de la proposée ; par conséquent l'expression $\frac{1}{2}\Phi-\sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2-\frac{C}{\varphi}}$ doit appartenir à la plus petite, et l'autre quasi-valeur à la seconde.

En faisant le même raisonnement sur l'inéquation du deuxième degré, en fonction de Π et de ϖ, on voit que ses deux quasi-valeurs doivent appartenir aux deux plus grandes racines de la proposée ; par conséquent l'expression $\frac{1}{2}\Pi+\sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2-\frac{C}{\varpi}}$ doit appartenir à la troisième, x_1, et l'autre quasi-valeur à la seconde.

Quant à la troisième racine de la première formule, pour l'obtenir on a $\begin{cases} p_{,} = -x_{,} \\ p_{,} < \varphi \end{cases}$, d'où $-x_{,} < \varphi$, ou $x_{,} > -\varphi$; et enfin $x_{,} = -< \varphi$ en effectuant. En opérant de même pour la première racine de la deuxième formule, on a $x_{,} = -> \varpi$;

114. 2°. Il faut remarquer maintenant qu'en résolvant l'une des deux inéquations du deuxième degré, la première, par exemple $x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi}$; d'après la méthode de solution connue, on a les deux quasi-valeurs

$$x < -\tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x > -\tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}};$$

et en effectuant ces deux quasi-valeurs, on devrait avoir

$$x = -> \tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x = -< \tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}.$$

Il en est de même pour la résolution de l'inéquation en π.

Cependant, dans la double formule ci-

dessus, on a transporté le signe négatif de l'autre côté du signe d'inéquation, sans en changer la direction, comme on l'a fait pour la troisième racine $x = - < \varphi$, et comme le prescrit la théorie. Pour en développer la raison, je considère les deux équations du deuxième degré,

$$x^2 + Ax + B = 0 \text{ et } x^2 - Ax + B = 0;$$

dont la première a ses racines négatives, et la deuxième ses racines positives : on a, pour l'une et l'autre, également cette solution :

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B} \text{ et } x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B},$$

c'est-à-dire que dans ces deux solutions on employe le double signe $\pm$ de la même manière ; il faudra l'employer ainsi :

$$x = -\tfrac{1}{2}A \mp \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \text{ et } x = \tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B}.$$

Cette distinction, dans les équations, paraît absolument inutile, elle présente même une futilité insignifiante ; mais il n'en est pas de même dans le calcul des inéquations, le signe d'inéquation fait une différence entre $\pm$ et $\mp$; et je dis que, pour la résolution de l'inéquation $x^2 + \varphi x + \frac{C}{\varphi} < 0$, dont les deux racines sont négatives par la forme de l'inéquation, il

faut employer le signe double $\mp$, de manière que l'on ait

$$x < -\tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x > -\tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}};$$

et en effectuant on aura

$$x = - > \tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x = - < \tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}.$$

Ce qui donne aux quasi-valeurs une direction d'inéquation qui est la même que celle qu'on a mise dans la double formule (112), et qui est contraire à celle qu'on aurait si l'on employait le double signe $\pm$, comme quand les racines sont positives.

115. Pour le démontrer, je suppose que l'équation proposée ait ses trois racines positives et qu'elle ait en conséquence la forme

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0.$$

Je la décompose également en deux facteurs, qui auront cette forme $(x^2 - Px + Q)(x - p) = 0$. En la traitant comme la précédente, j'aurai également $A = P + p$, $B = Q + Pp$, $C = PQ$ (50). J'aurai donc pour les quasi-valeurs originelles

les mêmes expressions $p > \pi$, $p < \varphi$, etc. elles naîtront de même primitivement de l'équation $p^3 - Ap^2 + Bp - C = o$, abaissée au deuxième degré par l'inéquation $Q < \frac{1}{4}P^2$. Cela posé, pour résoudre d'abord en fonctions de Φ l'équation

$$x^2 - Px + Q = o,$$

j'ai $\left\{\begin{array}{l} P = \dfrac{x^2 + Q.}{x} \\ P > \Phi\ldots\ldots \end{array}\right\}$ d'où $\left\{\begin{array}{l} \Phi < \dfrac{x^2 + Q}{x} \\ Q > \Phi x - x^2; \end{array}\right.$

d'un autre côté j'ai........ $Q > \dfrac{C}{\varphi}$.

Comme ces deux inéquations de Q sont dans la même direction, je ne puis pas voir immédiatement quelle est la direction du signe d'inéquation entre $\frac{C}{\varphi}$ et $\Phi x - x^2$. Pour la connaître, j'établis d'abord l'inéquation incertaine........ $\dfrac{C}{\varphi} \parallel \Phi x - x^2$,

ou bien......... $\dfrac{C}{x} \parallel \varphi(\Phi - x)$;

je transforme ainsi $\dfrac{C}{x} \parallel (p_{,} + z)(P - z - x)$;

en multipliant... $\dfrac{C}{x} \parallel p_{,}(P - x) + (P - p_{,} - x - z)z$.

J'observe que $\mathrm{P}-z$ ayant été mis à la place de Φ, on a $\mathrm{P}=p_1+p_2$, d'où l'inéquation devient

$$\frac{\mathrm{C}}{x} \parallel p_3(\mathrm{P}-x)+(p_1+p_2-p_3-x-z)z\,;$$

je mets φ pour p_3+z, j'ai

$$\frac{\mathrm{C}}{x} \parallel p_3(\mathrm{P}-x)+p_1+p_2-x-\varphi)z\,,$$

$$\text{comme } x=p_1 \text{ ou } p_2 \begin{cases} \text{si } x=p_1\text{, on a} \\ \dfrac{\mathrm{C}}{\varphi} \parallel p_3(\mathrm{P}-x)+(p_2-\varphi)z\,, \\ \text{si } x=p_2\text{, on a} \\ \dfrac{\mathrm{C}}{x} \parallel p_3(\mathrm{P}-x)+(p_1-\varphi)z\,, \end{cases}$$

Je compare ces deux inéquations avec l'équation

$$\frac{\mathrm{C}}{x}=p(\mathrm{P}-x)\,;$$

or on a $p_2-\varphi<0$ et $p_1-\varphi<0$, donc

$$\frac{\mathrm{C}}{x}>p_3(\mathrm{P}-x)+(p_1+p_2-x-\varphi)z\,,$$

donc, en remontant à la première inéquation,

$$\frac{\mathrm{C}}{\varphi}>\Phi x-x^2\,,$$

on obtient de-là l'inéquation du deuxième degré

$$x^2-\Phi x+\frac{\mathrm{C}}{\varphi}>0\,;$$

116. D'où l'on a

$$x_2 > \tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x_1 < \tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}.$$

Ces deux directions sont les mêmes que celles des mêmes quasi-valeurs de la double formule (112), considérées comme métanégatives; et comme ces deux dernières directions sont celles qui appartiennent aux quasi-valeurs positives, elles conviennent donc également aux quasi-valeurs de l'inéquation $x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi}$, qui ne diffère de celle-ci que parce que ses racines sont négatives, lorsqu'on considère le rapport d'inéquation de ces racines indépendamment de leur signe, ou lorsqu'on les fait métanégatives.

Il a donc fallu dans la résolution de l'inéquation $x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} < 0$ prendre le double signe $\mp$ et non pas $\pm$. Pour avoir d'abord

$$x < -\tfrac{1}{2}\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\varphi^2 - \frac{C}{\varphi}},$$

$$x > -\tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\varphi^2 - \frac{C}{\varphi}};$$

et pour obtenir en quasi-valeurs métanégatives

les mêmes directions que celles qu'on obtient pour les quasi-valeurs positives.

117. Pour voir comment cela doit avoir lieu, je compare les deux quasi-valeurs de Q, celle des x positifs et celle des x négatifs avec l'équation $Q = Px - x^2$; je vois d'abord évidemment que celle des x positifs $Q > \Phi x - x^2$ a la direction qui lui convient à cause de $P > \Phi$. Quant à celle des x négatifs $Q < -\Phi x - x^2$, le second membre de cette inéquation, en substituant la valeur de x négatif, fait une quantité égale au deuxième membre $\Phi x - x^2$ de l'inéquation des x positifs, mais alors sa direction est fausse. Je compare ensuite les deux inéquations

$$x^2 - \Phi x + \frac{C}{\varphi} > 0,$$

$$x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} < 0,$$

que je transforme en

$$(x - \tfrac{1}{2}\Phi)^2 > \tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi},$$

$$(x + \tfrac{1}{2}\Phi)^2 < \tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}.$$

On voit que ces deux inéquations ayant leurs deux membres positifs quand les racines sont réelles, et les deuxièmes membres étant les

mêmes, si la direction d'inéquation est vraie dans la première, il faut qu'elle soit fausse dans la deuxième.

Mais d'un autre côté si $(x-\frac{1}{2}\Phi)$ est une quantité positive, il faut que $(x+\frac{1}{2}\Phi)$ soit une quantité négative ; ainsi la deuxième inéquation n'a une direction fausse que parce qu'à sa racine elle a une direction vraie. C'est le cas de $-4<-3$ qui donne au quarré $16<9$.

118. Mais si au lieu de considérer l'origine du quarré j'extrais sa racine comme s'il était produit par une racine positive, en employant le signe double $\pm$, il en résulterait par cela même l'effectuation du signe d'inéquation, et j'aurais immédiatement la direction des quasi-valeurs négatives effectuées, ou des quasi-valeurs métanégatives. Ainsi, quel que soit le signe des racines de l'équation proposée $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, en résolvant toujours l'inéquation du deuxième degré $x^2+\Phi x+\frac{C}{\varphi}$ avec le double signe $\pm$, on aura dans tous les cas immédiatement la direction qui convient aux quasi-valeurs; si elles sont positives, le double signe $\pm$ leur convient directement, et si elles sont négatives, l'emploi de ce même double signe les effectue. On peut donc dire que les quasi-valeurs en x sont

métanégatives. Mais alors on se sert d'une expression abrégée, elles ne le sont que par un résultat d'opérations qu'on n'indique pas ; c'est ainsi qu'en algèbre on dit par abrégé, *moins par moins donne plus.*

Dans cette discussion, je ne me suis pas occupé de la résolution de l'inéquation $x^2 + \Pi x + \frac{C}{\varpi} > 0$, on en va voir la raison.

119. Je reviens maintenant à la double formule (112); que signifient ses six quasi-valeurs, tandis que la proposée n'a que trois racines ? J'observe que l'équation proposée $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, doit être considérée sous deux points de vue : 1°. on peut considérer que ses coëfficiens sont tous intrinséquement positifs, et que par conséquent elle est determinée à avoir ses trois racines négatives ; 2°. on peut la considérer sous un point de vue plus général, en regardant ses coëfficiens comme susceptibles d'avoir une valeur intrinsèque quelconque, négative ou positive : sous ce deuxième point de vue l'équation peut appartenir à toute espèce de racines.

Je ne l'ai considérée jusqu'alors que sous le premier point de vue, je continue encore de la considérer de même. J'observe mainte-

nant que ce signe du radical des deux quasi-valeurs de l'inéquation en π, savoir :

$$x_{,} = - < \frac{1}{2}\pi + \sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{C}{\varpi}},$$

$$x_{,} = - > \frac{1}{2}\pi - \sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{C}{\varpi}},$$

est imaginaire ; car si à la place de $\frac{1}{4}\pi^2$ je mets sa valeur $B - \pi\varpi$ (59) $= B - A\varpi + \varpi^2$; ce radical deviendra $\sqrt{\frac{\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C}{\varpi}}$; expression qui est imaginaire toutes les fois que les racines de la proposée sont réelles; car on a alors $\varpi^3 - A\varpi^2 + B\varpi - C < 0$ (69) ; tandis que le radical $\sqrt{\frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{C}{\varphi}} = \sqrt{\frac{\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C}{\varphi}}$, de l'expression en φ est toujours réel quand les trois racines le sont (69).

En comparant maintenant le grand radical de l'inéquation en Φ avec celui-ci, et substituant, dans l'un et l'autre, leurs valeurs en coëfficiens, j'ai pour l'inéquation en Φ,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{-2A^3 + 9AB - 27C + 2\sqrt{(A^2 - 3B)^3}}{A + 2\sqrt{A^2 - 3B}}};$$

pour l'inéquation en π,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{-2A^3 + 9AB - 27C - 2\sqrt{(A^2 - 3B)^3}}{A - 2\sqrt{A^2 - 3B}}}$$

Je remarque maintenant qu'en multipliant les deux numérateurs de ces radicaux, l'un par l'autre, j'aurai l'inéquation générale déjà trouvée ci-dessus (71) :

$$4A^3C - A^2B^2 - 18ABC + 4B^3 + 27C^2 < 0 ;$$

et si je fais $A = 0$, le produit des deux radicaux deviendra

$$\frac{1}{2\sqrt{3B}} \times \sqrt{\tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{4}C^2}.$$

Ce radical est le même que celui qu'on obtient en résolvant les équations du troisième degré (10), par les méthodes connues.

On voit déjà, par ce résultat, que les inéquations en Φ et en Π renferment les fonctions qui, par leur composition, forment les expressions imaginaires du cas irréductible. Ainsi l'on voit que le calcul des inéquations est la vraie méthode de la décomposition algébrique : toute la suite le fera voir encore.

120. Il ne faut pas confondre ces quasi-valeurs de l'inéquation en Π, qui n'ont que la forme imaginaire, avec les quasi-valeurs imaginaires qui appartiennent à l'équation, et qui naissent de la relation de ses coëfficiens : le calcul des inéquations les distingue toujours comme on le verra. Comme ces quasi-valeurs de l'inéquation en Π constituent le cas irré-

ductible, je les appellerai *quasi-valeurs irréductibles.*

En traduisant la double formule (112) en valeurs de coëfficiens, faisant comme ci-dessus $A^2 - 3B = r$, et la relation rationnelle des trois coëfficiens $-2A^3 + 9AB - 27C = SC$, et omettant le signe $=$ entre x et le signe d'inéquation, la double formule deviendra

121. Quasi-valeurs en Φ,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\phi}} \\ x_2 - > \frac{1}{2}\Phi + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\phi}} \\ x_3 - < \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x_1 - < \frac{1}{3}\left(A - \sqrt{r} - \sqrt{\frac{SC + 2r\sqrt{r}}{A + 2\sqrt{r}}}\right) \\ x_2 - > \frac{1}{3}\left(A - \sqrt{r} + \sqrt{\frac{SC + 2r\sqrt{r}}{A + 2\sqrt{r}}}\right) \\ x_3 - < \frac{1}{3}(A + 2\sqrt{r}. \end{array}\right.$$

Quasi-valeurs en Π,

$$\left.\begin{array}{l} x_3 - < \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}} \\ x_2 - > \frac{1}{2}\Pi - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}} \\ x_1 - > \pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x_3 - < \frac{1}{3}\left(A + \sqrt{r} + \sqrt{\frac{SC - 2r\sqrt{r}}{A - 2\sqrt{r}}}\right) \\ x_2 - > \frac{1}{3}\left(A + \sqrt{r} - \sqrt{\frac{SC - 2r\sqrt{r}}{A - 2\sqrt{r}}}\right) \\ x - > \frac{1}{3}(A - 2\sqrt{r}. \end{array}\right.$$

En comparant ces formules avec celle du deuxième degré,

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{A^2 - 3B},$$

on voit qu'elles suivent la même loi. D'abord si toutes les racines sont égales, la partie rationnelle $-\frac{1}{3}A$ est la seule qui reste, toutes

les quantités affectées de radicaux s'évanouissent ; elles servent, comme dans le deuxième degré, à déterminer l'inégalité des racines. On peut remarquer que le grand radical contient une fonction du radical du terme précédent, combinée avec une relation rationnelle de coëfficiens qui devient séparément $=0$ quand les racines sont égales. Il en sera de même des quasi-valeurs des racines appartenant à une équation d'un degré quelconque ; elles seront composées d'abord d'un premier terme rationnel $\frac{1}{m}A$, pour le degré m ; puis d'une suite de radicaux du deuxième degré, dont chacun contiendra une fonction de radicaux des termes précédens ; de sorte qu'elles ne présenteront qu'une suite de racines quarrées à extraire.

122. En remontant maintenant à l'origine de la séparation de ces six quasi-valeurs, la résolution de l'équation en p sépare d'abord deux quasi-valeurs ϖ et φ, qui sont les deux limites extrêmes de l'équation, l'une en-deçà de la plus petite racine, et l'autre au-delà de la plus grande ; et en deux autres paires de quasi-valeurs Π et Φ. Des deux limites ϖ et φ, il n'y a que la quasi-valeur ϖ qui soit susceptible de converger invariablement vers la valeur de la petite racine par une série de concentration ;

l'autre ne se concentre que dans certains cas, et ne peut pas; par conséquent, entrer dans les formules générales de solution.

De même, les deux paires de quasi-valeurs Φ et Π, étant séparées par la résolution de l'équation $x^2 + Px + Q = 0$, il n'y a des quatre quasi-valeurs, qui en résultent, que la petite quasi-valeur $x_1 - < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}$ qui forme une autre limite opposée de la petite racine, et qui peut y converger invariablement par la concentration.

D'abord c'est celle des deux quasi-valeurs en Φ dont la latitude est la plus petite, ou qui approche le plus près de sa racine correspondante. En effet, la somme des deux racines de l'inéquation $x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} = 0$, qui est $= \Phi$, est plus petite que la somme des deux plus petites racines de la proposée, à cause de $P > \Phi$; or, par la résolution de cette inéquation, la plus petite de ces deux quasi-valeurs se trouve plus grande que la plus petite racine de la proposée, puisqu'on a $x_1 - < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}$, il faut donc que l'expression de la deuxième $x_2 - > \frac{1}{2}\Phi + \sqrt{\frac{A}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}$ s'éloigne de x_2,

non-seulement à raison de $P > \Phi$, mais encore à raison de ce que la petite quasi-valeur a pris pour dépasser la première racine x_1 : de sorte que sa latitude est composée de deux élémens, tandis que la petite quasi-valeur ne surpasse sa racine que par la différence de ces deux élémens. La deuxième quasi-valeur a donc un principe de divergence. Les deux autres quasi-valeurs en π, qui sont irréductibles par leur forme imaginaire, sont encore moins susceptibles d'entrer dans les formules de solution. Il faut donc regarder la quasi-valeur de x_1 comme une autre limite convergente de l'équation, et qui a été rapprochée de la valeur de sa racine, par les opérations d'inéquation, comme l'autre limite $p > k\varpi$. Je forme avec ces deux limites opposées la formule

Formule de solution des racines négatives.

$$123.\quad x_1 - \begin{cases} > \dfrac{C}{B - \pi\varpi}. \\[2ex] < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \dfrac{C}{\varphi}}. \end{cases}$$

Je l'appelle *formule de solution*, par opposition à toutes les précédentes qui ne sont que des formules purement théoriques, par le moyen desquelles je suis parvenu à extraire celle-ci. Ses deux limites sont les seules qui puissent se concentrer par une série invariable

de concentration, et aboutir, par deux directions opposées, à la valeur de la première racine : on peut voir combien il est facile d'y parvenir par les méthodes de concentration développées ci-dessus.

Si je prends les deux autres limites de l'équation, j'aurai cette autre formule,

$$124.\quad x, - \begin{cases} < \varphi. \\ > \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}} \end{cases}$$

Ces deux limites, lorsque les coëfficiens de la proposée sont intrinséquement positifs, sont réfractaires à la solution, je l'appelle *formule divergente* ou irréductible : j'en ferai usage ci-après :

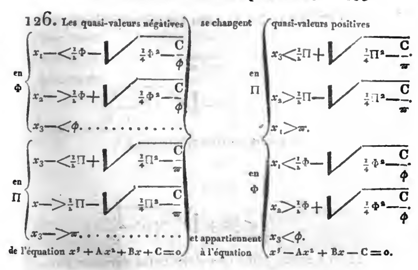
125. Je considère maintenant l'équation $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ sous son point de vue le plus général, tel que les coëfficiens puissent avoir une valeur quelconque, positive ou négative, et je considère d'abord le cas où toutes les racines sont positives ; c'est-à-dire le cas où les coëfficiens sont alternativement positifs et négatifs. Cela posé, je reprends les deux

$$\text{inéquations} \begin{cases} x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} < 0. \\ x^2 + \Pi x + \frac{C}{\varpi} > 0. \end{cases}$$

Si les valeurs de x sont négatives, la première de ces deux inéquations donne deux quasi-valeurs réductibles, et la deuxième deux quasi-valeurs irréductibles; mais si les racines sont toutes positives, alors Φ devient $-\Pi$ (55) en faisant ressortir le signe négatif de A, et $\frac{C}{\varphi}$ devient $\frac{C}{\varpi}$ en faisant également ressortir le signe de C : le changement contraire a lieu dans la deuxième inéquation ; on aura donc cette transformation :

$$\left.\begin{array}{l} x^2+\Phi x+\frac{C}{\varphi}<0 \\ x^2+\Pi x+\frac{C}{\varpi}>0 \end{array}\right\} \text{se changent en} \left\{\begin{array}{l} x^2-\Pi x+\frac{C}{\varpi}<0. \\ x^2-\Phi x+\frac{C}{\varphi}>0. \end{array}\right.$$

On voit que, dans ce cas, l'expression en Π n'est plus irréductible, mais qu'elle convient au cas où toutes les racines sont positives ; et qu'au contraire alors, c'est l'inéquation en Φ qui devient irréductible, en appliquant cette transformation à la double formule (112), on a



Ainsi, en considérant que la proposée a ses coëfficiens tous positifs, il n'y a que les deux

limites $x_1 - > \varpi$ et $x - < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\phi}}$

qui servent à la formule de solution ci-dessus (123) ; mais en considérant qu'elle a ses coëfficiens alternativement positifs et négatifs, cette formule devient la formule divergente, ou irréductible ; et la formule divergente devient la formule de solution. Ainsi l'on a la double formule de solution qui suit, pour les équations dont les racines sont toutes de même signe :

Formule de solution des racines qui ont toutes le même signe.

127. Pour les racines toutes négatives,

$$x_1 - \begin{cases} > \dfrac{C}{B - \Pi\varpi}. \\ < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \dfrac{C}{\varphi}}. \end{cases}$$

Pour les racines toutes positives,

$$x_3 - \begin{cases} < \dfrac{C}{B - \Phi\varphi}. \\ < \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \dfrac{C}{\varpi}}. \end{cases}$$

Il faut remarquer que dans cette dernière formule on n'a pas fait ressortir le signe négatif des quantités dans la seconde limite, car elle serait devenue la même que la première. Ce n'est que dans la colonne à droite de la formule précédente qu'on les a fait ressortir.

Cette double formule de solution pour les racines du même signe est la seule dont on fera usage dans le deuxième mode de solution; elle servira, comme on le verra, à résoudre toutes les équations du troisième degré, quel que soit le signe de leurs différentes racines, sans leur faire subir aucune préparation préalable.

Il n'est cependant pas inutile, pour le développement de la théorie, d'appliquer la formule

des six quasi-valeurs aux équations dont les racines sont indifféremment négatives ou positives. Je dispose ces six quasi-valeurs en trois paires de limites de cette manière

$$128.\ x_1 - \begin{cases} > \varpi. \\ < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}. \end{cases}$$

$$x_2 - \begin{cases} > \frac{1}{2}\Phi + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}. \\ > \frac{1}{2}\Pi - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}}. \end{cases}$$

$$x_3 - \begin{cases} < \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}}. \\ < \varphi. \end{cases}$$

129. Il faut remarquer que s'il y a seulement une racine positive, ce sera évidemment celle de x_1; p_1 sera négatif, et par conséquent sa quasi-valeur ϖ sera négative. S'il y a deux racines positives, ce sera x_1 et x_2, et il est clair que la quasi-valeur de x_1 sera plus grande en nombre que celle de x_2; car l'expression de la première $\left(\frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}\right)$ aura un résultat négatif évidemment plus grand en

nombre que l'expression $\left(\frac{1}{2}\Phi+\sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2-\frac{C}{\varphi}}\right)$ de la deuxième ; p_1 et p_2 seront négatifs, p_3 restera positif ainsi que sa quasi-valeur φ, qui ne deviendra négative que lorsque les trois racines seront positives et elle sera alors la plus petite en nombre. De sorte que l'ordre des valeurs des racines dans l'équation en p et dans l'équation en x sera selon ces deux suites

Equations en p, $-5,-4,-3,-2,-1,0,+1+2+3+4$, etc.
Equations en x, $+5+4+3+2+1,0-1-2-3-4$, etc.

130. C'est sur cette formule qu'on a calculé les différens exemples du tableau ; on peut voir que toutes les applications sont conformes à la théorie qu'on a développée. Il ne s'agit ici que des équations dont toutes les racines sont réelles. Voici ce qu'on y remarque :

1°. Dans les sept premiers exemples, dont toutes les racines sont négatives, la première racine x_1 est entre les deux limites opposées ϖ et $\frac{1}{2}\Phi-\sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2-\frac{C}{\varphi}}$.

2°. Les quasi-valeurs en fonctions de Φ des racines x_1 et x_2 ont une forme réelle avec la direction déterminée (124), et les quasi-valeurs de x_2 et x_3 en fonctions de Π ont une forme imaginaire à l'exception des exemples 6 et 7 :

cela vient de ce que la valeur de ϖ, qui est le dénominateur de grand radical, est négative; mais ces quasi-valeurs ont une très-grande divergence qui les rend aussi peu propres à donner une formule de solution que les précédentes qui ont la forme imaginaire. Elles ont néanmoins la direction d'inéquation qui leur convient.

3°. Dans l'exemple sixième, les deux quasi-valeurs de l'inéquation en Φ donnent exactement des valeurs des deux racines égales, qui sont les deux plus petites $= 1$, et dans l'exemple septième, ce sont les deux quasi-valeurs de l'inéquation en Π qui donnent exactement les deux racines égales qui sont les deux plus grandes $= 10$; c'est une suite nécessaire de ce qu'on a vu plus haut (85), car si dans le sixième exemple la valeur de φ a donné exactement la racine inégale $= 20$, il est nécessaire que Φ contienne exactement la somme des deux racines égales, et que par conséquent

$\sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}$ soit $= 0$; par la même raison

on voit que dans l'exemple septième, Π doit contenir exactement la somme des deux racines égales, qui sont les deux plus grandes,

et l'on doit avoir $\sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}} = 0$.

4°. L'exemple huitième est précisément l'inverse de l'exemple premier. C'est la valeur de x_3, qui est entre les deux limites opposées et réelles φ et $\frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}}$, qui sont les mêmes que les deux limites opposées de x_1, et ce sont les quasi-valeurs en Φ qui ont la forme imaginaire. Ainsi les exemples premier et huitième confirment la double formule de solution aux racines de même signe (127).

5°. Dans les exemples suivans, où les racines sont de différens signes, les quasi-valeurs de l'inéquation en Π ont la forme réelle; cela vient encore du dénominateur ϖ du grand radical qui est négatif.

6°. Dans les exemples dixième et douzième, qui n'ont qu'une racine positive, cette racine appartient aux deux limites de x_1, et dans les exemples neuvième et onzième, qui ont deux racines positives, les deux limites de x_1, appartiennent à la plus grande en nombre des deux.

7°. Toutes les quasi-valeurs du tableau qui proviennent des inéquations en Π et en Φ ont constamment la même direction, soit qu'elles expriment des valeurs négatives ou positives. On en a vu la raison (116) (118). Il n'en est pas de même des quasi-valeurs de ϖ et de φ; toutes celles qui sont négatives et appar-

tiennent en conséquence à des racines positives en x, ont été effectuées en changeant leur signe d'inéquation. Voilà pourquoi la valeur x_3, de l'exemple huitième, se trouve entre deux limites de direction opposée, quoiqu'elle appartienne dans la double formule de solution (127) à deux quasi-valeurs qui ont la même direction, savoir :

$$x_3 - \begin{cases} < \varphi \\ < \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}}, \end{cases}$$

parce que dans cette formule la valeur de φ, qui est intrinséquement négative, n'est pas effectuée ; tandis qu'elle est effectuée dans l'exemple du tableau où l'on a $x_3 \begin{cases} > 0{,}8453 \\ < 1{,}039. \end{cases}$

131. Il s'agit maintenant d'appliquer ces formules aux équations qui contiennent des racines imaginaires. Il faut distinguer deux cas comme ci-dessus, 1°. quand le radical originel $\sqrt{r}$ est réel ; 2°. quand il est imaginaire. Premier cas, comme il n'y a alors que l'une des deux quasi-valeurs ϖ ou φ qui puisse appartenir à la paire de racines imaginaires (76), ce cas se subdivise en deux autres :

1°. Si p_1 est réel, on a (80) $\begin{cases} SC - 2r\sqrt{r} > 0 \\ SC + 2r\sqrt{r} > 0 ; \end{cases}$

mais ces deux quantités forment l'expression du grand radical dans les quasi-valeurs de l'inéquation en Φ et en Π; toutes ces quatre quasi-valeurs auront donc une forme réelle. Ainsi x_{1}, qui est la racine réelle, aura ses deux limites ou ses deux quasi-valeurs exprimées en quantités réelles comme cela doit être; mais les deux autres racines x_2 et x_3, qui sont imaginaires, auront également leurs quasi-valeurs exprimées en quantités réelles. Ainsi, dans ce cas, les quasi-valeurs de la formule seront toutes réelles, à moins que le dénominateur ϖ du grand radical qui appartient à l'inéquation en Π, ne soit négatif.

2°. Si p_3 est réel, on a (80) $\left\{\begin{array}{l} SC-2r\sqrt{r}<0, \\ SC+2r\sqrt{r}<0 \end{array}\right.$

dans ce cas, le grand radical des quasi-valeurs en Φ et en Π est imaginaire; d'après cela les deux racines imaginaires x_1 et x_2 auront l'expression imaginaire qui leur convient, mais x_3 aura aussi une expression imaginaire quoique réel. Ainsi, dans ces deux cas, les quasi-valeurs réductibles en Φ ont la forme qui convient à leur racine, et les quasi-valeurs irréductibles en Π ont une forme contraire.

Ce résultat prouve encore que les deux inéquations en Φ et en Π décomposent le cas irréductible; en effet, si je multiplie dans le cas

des racines imaginaires les expressions qui composent les deux grands radicaux, savoir : $SC - 2r\sqrt{r}$ par $SC + 2r\sqrt{r}$, j'aurai un produit positif ; j'aurai l'inéquation générale ci-dessus (71), avec le signe > 0, parce que ces deux quantités sont à-la-fois ou toutes les deux positives ou toutes les deux négatives, ce produit, au contraire, est négatif toutes les fois que les racines sont réelles, comme on l'a déjà vu. Ainsi, dans tous les cas, on aboutit à une expression conforme au cas irréductible $\sqrt{\frac{1}{27}B^3 + \frac{1}{4}C^2}$, et qui indique comme celle-ci les cas où les racines sont réelles et ceux où elles sont imaginaires.

132. Quant à la direction des quasi-valeurs, quand x_1 est réel, on a déjà vu que π seul change de direction et que l'on a $\begin{matrix} p_1 < \varpi \\ p_3 < \varphi \end{matrix}$, par conséquent l'on a $P > \Phi$, d'où il suit que l'expression de la première racine qui naît de l'inéquation en Φ ne doit pas changer de direction et que par conséquent l'on doit avoir pour la première racine ou pour les limites réductibles de l'équation

$$x_1 - \begin{cases} < k\varpi \\ < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\varphi}}. \end{cases}$$

Quant aux deux racines imaginaires, elles appartiennent à la limite irréductible de l'équation, et elles ont en conséquence une forme contraire à celle qu'elles doivent avoir. Je ferai tomber le signe d'inéquation sur les deux limites ϖ et $\frac{1}{2}\Phi$ qui appartiennent à la partie réelle de cette paire de racine; et comme cette partie est la même pour les deux et qu'on a d'ailleurs (84) p_2 et $p_3 \left\{\begin{matrix} <\varphi \\ >\frac{1}{2}\Pi \end{matrix}\right.$, j'exprimerai la paire de racines imaginaires de cette manière

$$x_2 \text{ et } x_3 - \left\{\begin{matrix} <\varphi \\ >\frac{1}{2}\Pi \end{matrix}\right\} \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\varpi}}.$$

Quand p_3 est réel, il n'y a que la quasi-valeur φ qui change de direction, l'on a $p > \varpi$ et $p > \varphi$. Alors les quasi-valeurs de l'inéquation en Π ne changent pas de direction, et l'on a pour la racine réelle

$$x_1 - \left\{\begin{matrix} >\varphi, \\ <\frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}}; \end{matrix}\right.$$

mais la dernière de ces deux limites est irréductible et a une forme contraire à celle qui lui convient.

Pour les deux racines imaginaires, leurs quasi-valeurs ont la forme qui leur convient. J'appliquerai, comme dans le premier cas, le

signe d'inéquation qui appartient à leur partie réelle, et j'aurai

$$x_1 \text{ et } x_2 - \left\{ \begin{matrix} > \pi \\ < \frac{1}{2}\Phi \end{matrix} \right\} \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\phi}};$$

en résumant on a la double formule :

133.

$$\text{Quand} \left\{ \begin{matrix} SC + 2r\sqrt{r} > 0 \\ SC - 2r\sqrt{r} > 0 \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} x_1 - \left\{ \begin{matrix} < k\pi. \\ < \frac{1}{2}\Phi - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\Phi}}. \end{matrix} \right. \\ x_1 \text{ réel} \left\{ \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} - \left\{ \begin{matrix} < \varphi \\ > \frac{1}{2}\Pi \end{matrix} \right\} \mp \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}}. \right. \end{matrix} \right.$$

$$\text{Quand} \left\{ \begin{matrix} SC + 2r\sqrt{r} < 0 \\ SC - 2r\sqrt{r} < 0 \end{matrix} \right. \left| \begin{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \left\{ \begin{matrix} > \pi \\ < \frac{1}{2}\Phi \end{matrix} \right\} \mp \sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 - \frac{C}{\Phi}}. \\ x_3 \text{ réel} \left\{ x_3 - \left\{ \begin{matrix} > \phi. \\ < \frac{1}{2}\Pi + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi^2 - \frac{C}{\pi}}. \end{matrix} \right. \right. \end{matrix} \right.$$

134. Je viens maintenant au cas où le radical originel est imaginaire, alors toutes les expressions de p et de x sont embarrassées de quantités imaginaires, le grand radical des quasi-valeurs de x contient une fonction de quantités en partie réelles et en partie imaginaires. Voyons malgré cela comment on peut démêler les quasi-valeurs qui appartiennent à la racine réelle de celles qui appartiennent à la paire de racines imaginaires. La manière

dont on résout ces espèces d'équations dans la résolution en p_1 est assez simple, voyez ci-dessus (104), (105), (106), et c'est à cette méthode qu'il faut toujours s'en tenir pour les opérations du calcul. Dans ce que j'ai à dire, je n'ai pour but que de développer la théorie du calcul.

Je réduis d'abord au même dénominateur les expressions des deux grands radicaux des quatre quasi-valeurs des deux inéquations en Φ et en Π. Comme j'ai fait ressortir le signe négatif de r pour avoir $\sqrt{-r}$, j'ai

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2-\tfrac{C}{\varphi}}=\left(\sqrt{\frac{SC-2r\sqrt{-r}}{A+2\sqrt{-r}}}\right)=\sqrt{\frac{ASC-4r^2-2(Ar+SC)\sqrt{-r}}{3(4B-A^2)}}=\sqrt{f-\sqrt{-h}}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2-\tfrac{C}{\varpi}}=\left(\sqrt{\frac{SC+2r\sqrt{-r}}{A-2\sqrt{-r}}}\right)=\sqrt{\frac{ASC-4r^2+2(Ar+SC)\sqrt{-r}}{5(4B-A^2)}}=\sqrt{f+\sqrt{-h}}$$

Maintenant, je dis que ces quatre quasi-valeurs doivent être disposées de la manière suivante. J'emploie ici simplement le signe $\parallel$ pour éviter toute discussion relativement au signe d'inéquation.

$$135.\left.\begin{cases}\left\{\begin{array}{l} x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\left(A-\sqrt{r}-\sqrt{f-\sqrt{-h}}\right)\\ x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\left(A+\sqrt{r}-\sqrt{f+\sqrt{-h}}\right)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\left(A-\sqrt{r}+\sqrt{f-\sqrt{-h}}\right)\\ x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\left(A+\sqrt{r}+\sqrt{f+\sqrt{-h}}\right)\end{array}\right.\end{cases}\right\}\text{ou}\begin{cases}\left\{\begin{array}{l} x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\Phi-\sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2-\tfrac{C}{\varphi}}.\\ x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\Pi-\sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2-\tfrac{C}{\varpi}}.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x_1-\parallel\tfrac{1}{2}\Phi+\sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi^2-\tfrac{C}{\varphi}}.\\ x^1-\parallel\tfrac{1}{2}\Pi+\sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2-\tfrac{C}{\varpi}}.\end{array}\right.\end{cases}$$

En effet, ϖ appartenant à une racine imaginaire, il est nécessaire que l'inéquation en Π, qui contient les deux autres racines, renferme l'autre racine imaginaire avec la racine réelle. Pareillement φ appartenant à l'autre racine imaginaire, il est nécessaire que l'inéquation en Φ renferme une racine imaginaire et une racine réelle. Il est donc nécessaire d'appareiller une quasi-valeur en Φ avec une quasi-valeur en Π; alors c'est l'une de ces deux paires qui contient les deux imaginaires, et l'autre deux fois la quasi-valeur de la racine réelle.

En outre, des racines imaginaires ne peuvent se trouver dans une équation que par paires et sous cette forme $x=a+b\sqrt{-1}$, $x=a-b\sqrt{-1}$; il faut donc que leur partie réelle soit égale dans l'une et dans l'autre, et que la partie imaginaire soit aussi égale et ne diffère que par le signe, par conséquent les deux quasi-valeurs de l'inéquation en Φ, par exemple, ne peuvent pas former une paire de racines imaginaires, parce que l'expression $\sqrt{-1}$ s'y trouve avec le même signe dans toutes les deux. Il en est de même de l'inéquation en Π, on ne peut pas non plus former une paire de racines imaginaires avec x_1 et x_3, elles auraient alors leur partie réelle et leur partie imaginaire inégale, comme on va le voir :

Je fais $\sqrt{f \pm \sqrt{-h}} = y \pm \sqrt{z}$, j'élève au quarré les deux membres; je fais une première équation entre les parties rationnelles des deux membres, et une deuxième entre les parties irrationnelles; j'obtiens par ce moyen la valeur de $\sqrt{f \pm \sqrt{-h}}$ par ces deux formules :

136. $\sqrt{f+\sqrt{-h}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}.$

$\sqrt{f-\sqrt{-h}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}f-\sqrt{\tfrac{1}{2}f^2+h}}.$

Dans ces deux formules, le premier radical est nécessairement réel et l'autre imaginaire, et le radical intérieur est toujours réel quand les racines sont imaginaires. Celui qui appartient à l'inéquation en Φ a pour coëfficient de son radical interne $-2(\mathrm{A}r + \mathcal{S}\mathrm{C})$, et celui qui appartient à l'inéquation en Π a pour coëfficient de ce même radical interne $2(\mathrm{A}r + \mathcal{S}\mathrm{C})$; ainsi $\sqrt{f - \sqrt{h}}$ appartient au premier et $\sqrt{f + \sqrt{-h}}$ au deuxième, en supposant que l'on ait $\mathrm{A}r + \mathcal{S}\mathrm{C} > 0$. Cela posé, les quatre quasi-valeurs ci-dessus deviennent

137.
$\mathrm{A}r+\mathcal{S}\mathrm{C}>0$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{en } \Phi & x_1 \parallel \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{A}-\sqrt{-r}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \\ \text{en } \Pi & x_2 \parallel \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{A}+\sqrt{-r}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \\ \text{en } \Phi & x_3 \parallel \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{A}-\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \\ \text{en } \Pi & x_4 \parallel \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{A}+\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \end{array}\right.$$

1°. Il n'y a que cette disposition qui puisse former deux paires de racines imaginaires.

2°. Dans ϖ et φ tout le principe de l'inégalité des racines est imaginaire, et j'observe que la deuxième de ces deux paires de quasi-valeurs a pour quantité imaginaire la somme des deux radicaux $\sqrt{-r}+\sqrt{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}$, et la première n'a que la différence de ces deux radicaux. C'est donc la deuxième paire de ces quasi-valeurs qui convient aux deux racines imaginaires de l'équation. Quant à la racine réelle, je l'obtiendrai, ou bien en prenant la moitié de la somme de la première paire des quasi-valeurs, ou bien en faisant $x_1 \parallel A-x_2-x_3$; j'aurai dans les deux cas pour la racine réelle une expression dégagée de toute quantité imaginaire. On aura donc pour les trois racines, en prenant pour x_1 la quasi-valeur $A-x_2-x_3$

138. Pour la racine réelle,

$$x_1 \parallel \tfrac{1}{3}\left(A-2\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right.$$

Pour les imaginaires,

$$\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix} \parallel \tfrac{1}{3}\left(A+\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right)\mp\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right.$$

Maintenant, si j'ai $Ar+\mathcal{S}C<0$, le coëfficient du radical intérieur $-(Ar+\mathcal{S}C)$, qui appartient au grand radical de l'inéquation en Φ, se trouvera positif et l'autre sera négatif; alors $\sqrt{f+\sqrt{-h}}$ devient $\sqrt{f-\sqrt{-h}}$

et $\sqrt{f-\sqrt{-g}}$ devient $\sqrt{f+\sqrt{-g}}$; il faudra donc appliquer les deux formules (136) dans un ordre inverse de celui du cas précédent, et j'aurai

139.
$Ar+SC<0$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{en } \Phi & x_1 - \| \tfrac{1}{3}\left(A-\sqrt{-r}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \\ \text{en } \Pi & x_1 - \| \tfrac{1}{3}\left(A+\sqrt{-r}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2\ \ +}}\right). \\ \text{en } \Phi & x_2 - \| \tfrac{1}{3}\left(A-\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \\ \text{en } \Pi & x_3 - \| \tfrac{1}{3}\left(A+\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right). \end{array}\right.$$

Dans ce cas-ci, c'est la première paire des quasi-valeurs qui a la somme de ses radicaux imaginaires avec des signes contraires dans chacune des deux quasi-valeurs de x, elle appartient donc à la paire de racines imaginaires de la proposée, et l'on a alors, en opérant comme dans le premier cas,

140. Pour les deux imaginaires,

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \| \tfrac{1}{3}\left(A-\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right) \mp \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{-r}+\sqrt{\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f+h}}\right.$$.

Pour la racine réelle,

$$x_3 - \| \tfrac{1}{3}\left(A+2\sqrt{\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2+h}}\right.$$.

On voit que dans le premier cas c'est la petite racine qui est réelle et la grande racine dans le deuxième.

En donnant maintenant la direction qui convient aux quasi-valeurs de la racine réelle, et aux parties réelles des deux imaginaires, en

réunissant de plus les limites de la résolution de l'équation en p, on a cette double formule

141.

$$A r + SC > 0 \left\{ \begin{array}{l} x_1 - \left\{ \begin{array}{l} < \frac{1}{3}A. \\ > \frac{1}{3}\left(A - 2\sqrt{\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\right) \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array} - \left\{ \begin{array}{l} > \frac{1}{3}A \ldots\ldots\ldots\ldots \\ < \frac{1}{3}\left(A + \sqrt{\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\right) \end{array} \right\} \mp \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{-r}. \\ \frac{1}{3}\sqrt{-r} + \sqrt{\frac{1}{3}f - \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\Big) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$A r + SC < 0 \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} - \left\{ \begin{array}{l} < \frac{1}{3}A \ldots\ldots\ldots\ldots \\ > \frac{1}{3}\left(-A\sqrt{\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\right) \end{array} \right\} \mp \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\sqrt{-r}. \\ \frac{1}{3}\left(\sqrt{-r} + \sqrt{\frac{1}{3}f - \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\right) \end{array} \right. \\ x_3 - \left\{ \begin{array}{l} > \frac{1}{3}A. \\ < \frac{1}{3}\left(A + 2\sqrt{\frac{1}{3}f + \frac{1}{3}\sqrt{f^2 + h}}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

142. Les exemples du tableau, depuis le treizième jusqu'au dix-neuvième, confirment tout ce que l'on vient de dire sur la résolution des équations qui contiennent des imaginaires. Les exemples depuis le treizième jusqu'au seizième sont des équations dans lesquelles ϖ et φ sont réels, et dans les suivans le radical originel est imaginaire.

1°. Dans le treizième on a $SC \mp 2r\sqrt{r} < 0$, et la grande racine est conséquemment la réelle; alors les quasi-valeurs qui proviennent des deux inéquations en Φ et en Π ont la forme imaginaire aussi bien pour la racine réelle x_3 que pour les deux imaginaires. Il en est de même du quinzième exemple, on voit en

même temps que la partie réelle des deux racines imaginaires est entre ϖ et $\frac{1}{2}\Phi$, ainsi que dans les exemples suivans.

2°. Dans l'exemple quatorzième, où la petite racine ($=1$) est réelle, et où l'on a par conséquent $SC \mp 2r\sqrt{r} > 0$, toutes les quasi-valeurs ont la forme réelle. On a pour la racine réelle la double limite dans le même sens $x_1 - \left\{ \begin{matrix} < 1{,}0717 \\ < 1{,}122 \end{matrix} \right.$. Quant aux deux racines imaginaires, j'ai exprimé leur valeur de cette manière $\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} - \left\{ \begin{matrix} < 19{,}5917 \\ > 14{,}964 \end{matrix} \right. \mp \sqrt{13, 13}$. En distinguant la valeur du grand radical $\sqrt{13, 13}$ qui devrait être imaginaire, des deux limites opposées φ et $\frac{1}{2}\Pi$ qui sont réelles de leur nature, et qui ont ici une direction opposée.

3°. On peut observer que les trois exemples 13, 14, 15 ont la forme qui leur convient. Dans l'exemple seizième, la première racine étant réelle, a sa quasi-valeur sous forme réelle; cela vient de ce que dans cet exemple la quasi-valeur ϖ est négative, c'est la même raison qui fait que quand les racines sont toutes réelles et de différens signes, le grand radical en fonctions de Π et de ϖ ont la forme réelle à cause du dénominateur ϖ qui est alors négatif.

143. Maintenant, quant à l'application de la résolution des équations dont le radical originel est imaginaire, on voit que dans les exemples dont on a calculé les quasi-valeurs, leur séparation et leur direction est conforme à la théorie qu'on vient de développer. Au reste, ces formules ne servent point dans le calcul, le deuxième mode de solution en donne de plus simples avec des quasi-valeurs plus rapprochées, et en général tout ce que l'on a dit dans ce premier mode de solution n'a eu pour but que le développement de la théorie de ce calcul. Il ne sert en quelque sorte que d'introduction au deuxième mode de solution qui est la vraie méthode de résolution pour la pratique du calcul par la simplicité et la généralité de ses formules, comme on le verra.

144. On peut observer que ce premier mode de solution ne résout généralement une équation quelconque qu'autant que toutes ses racines sont du même signe; car si elles sont de signe différent, on n'a plus de méthode générale de concentration. Néanmoins ce mode suffit pour résoudre toute espèce d'équation quel que soit le signe de ses racines, il suffit pour cela de la préparer de manière qu'elle ait toutes ses racines de même signe : ce qui est toujours possible.

Concentration des racines imaginaires.

145. Quoique les racines soient du même signe, la méthode de concentration ne peut pas conduire à la valeur exacte de la partie réelle des racines imaginaires, la série de concentration franchit ces valeurs sans s'y arrêter; cela vient de ce qu'en substituant dans l'équation à la place de x la valeur de la partie réelle d'une racine imaginaire, son résultat ne devient pas $=0$. On peut néanmoins parvenir à concentrer la somme et le produit des deux racines imaginaires.

En effet, j'ai (50) $\begin{matrix} Q=B-Pp \\ Q=\frac{C}{p} \end{matrix}$, d'où, à cause de $p=A-P$, j'obtiens l'équation en P

$$P^3-2AP^2+(A^2+B)P-(AB-C)=0.$$

Pour la ramener à l'équation générale du troisième degré, je la fais

$$x'^3+A'x'^2+B'x'+C'=0,$$

j'ai $\begin{cases} \sqrt{A'^2-3B'}=\sqrt{A^2-3B}=\sqrt{r}, \\ -2A'^3+9A'B'-27C'=-2A^3+9AB-27C; \end{cases}$

d'où $\qquad \mathcal{S}C'=\mathcal{S}C.$

Ainsi les expressions qui font l'inégalité des racines sont les mêmes que celles de la proposée, et en employant les coëfficiens de la

proposée, on a pour les quasi-valeurs originelles (Π), (ϖ), etc.

146. $$\begin{aligned} P' &< -\tfrac{2}{3}(2A - \sqrt{r}) = <(\Pi) \\ (p'_1) &> -\tfrac{2}{3}(A + \sqrt{r}) = >(\pi) \\ P' &> -\tfrac{2}{3}(2A + \sqrt{r}) = >(\Phi) \\ p'_3 &< -\tfrac{2}{3}(A + \sqrt{r}) = <(\varphi). \end{aligned}$$

Si les racines de la proposée sont toutes négatives, les trois de l'équation en P sont toutes positives; c'est donc la quasi-valeur (φ) qui correspond à la petite racine; c'est donc la double limite inférieure de la formule de solution (127) qui répond aux deux quasi-valeurs opposées de la petite racine. En l'exprimant immédiatement en coëfficiens de la proposée, on a

147. $$x'_1 \text{ ou } P_1 - \left\{ \begin{array}{l} < k(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ < \tfrac{1}{2}(\Pi) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\Pi)^2 - \dfrac{C'}{(\pi)}} \end{array} \right\} \text{devient}$$

$$x'_1 \text{ ou } P_1 \left\{ \begin{array}{l} > \dfrac{9(AB - C)}{(2A + \sqrt{r})^2}. \\ < \tfrac{2}{3}(2A - \sqrt{r}) - \tfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{SC + 2r\sqrt{r}.}{2(A + \sqrt{r})}} \end{array} \right.$$

En général, tout ce qu'on a dit pour la résolution des valeurs de x convient à celles des valeurs de l'équation en P.

148. **Maintenant**, si la proposée a deux racines imaginaires, l'équation en P, qui a les mêmes relations entre les trois coëfficiens A, B, C de la proposée, a aussi deux racines imaginaires et une réelle. Mais maintenant il faut observer que chaque valeur de P renferme deux racines de la proposée, or il n'y a que la somme de ses deux racines imaginaires qui puisse former un résultat réel, parce que la somme des deux quantités imaginaires $=0$, donc la valeur réelle de P appartient à la somme des deux racines imaginaires de la proposée; mais alors elle peut se concentrer soit directement, si elle est la plus petite des trois racines de l'équation, ou par la concentration de compensation, si elle est la plus grande. On peut donc par ce moyen concentrer Π ou Φ de l'une des deux inéquations du deuxième degré qui appartient aux deux racines imaginaires de la proposée.

149. On pourrait également concentrer la quasi-valeur de Q, quand elle contient le produit de deux racines imaginaires; car en prenant la valeur de Q au lieu de celle de P, on aboutit à l'équation

$$Q^3 - BQ^2 + ACQ - C^2 = 0,$$

qui a trois valeurs de Q, c'est-à-dire les trois

produits différens que les racines de la proposée sont susceptibles de donner en les multipliant deux à deux. Maintenant, si la proposée a deux racines imaginaires, leur produit fera une quantité réelle et fera par conséquent la valeur réelle de l'équation en Q, sa quasi-valeur pourra donc être concentrée ou directement ou par compensation.

Les deux autres valeurs de Q seront imaginaires puisqu'elles sont le produit d'une des deux imaginaires avec la réelle.

On peut donc, lorsque les racines d'une équation sont de même signe, aboutir à toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

DEUXIÈME SECTION.

Second mode de solution, ou mode de solution double.

150. J'APPELLE double ce mode de solution, parce que les formules qu'on obtient donnent immédiatement les quasi-valeurs des deux racines extrêmes de la proposée, comme on va le voir.

Je reprends les deux inéquations originelles $p_1 > \varpi$, $p_3 < \varphi$, et je fais pour le complément

de ϖ...................... $x = -(\varpi + z)$

pour le complément de φ.... $x = -(\varphi - z')$

en substituant successivement ces deux valeurs de x dans l'équation $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, j'ai les deux nouvelles équations

$$z^3 \left.\begin{matrix}+3\varpi\\-A\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}+3\varpi^2\\-2A\varpi\\+B\end{matrix}\right\} z \left.\begin{matrix}+\varpi^3\\-A\varpi^2\\+B\varpi\\-C\end{matrix}\right\} = 0 \qquad z'^3 \left.\begin{matrix}-3\varphi\\+A\end{matrix}\right\} z'^2 \left.\begin{matrix}+3\varphi^2\\-3A\varphi\\+B\end{matrix}\right\} z' \left.\begin{matrix}-\varphi^3\\+A\varphi^2\\-B\varphi\\+C\end{matrix}\right\} = 0$$

J'exprime ces nouveaux coëfficiens en valeurs de coëfficiens de la proposée, et j'ai

151. $$z^3 - 2\sqrt{r}\,z^2 + rz - \left(\frac{2r\sqrt{r} - SC}{27}\right) = 0$$

pour complément de ϖ ;

$$z'^3 - 2\sqrt{r}\,z'^2 + rz - \left(\frac{2r\sqrt{r} + SC}{27}\right) = 0$$

pour complément de φ,

ou $\left\{\begin{matrix} z^3 - az^2 + bz - c = 0 \\ z'^3 - az^2 + bz - \gamma = 0 \end{matrix}\right\}$ Le dernier terme seul est différent.

Maintenant, z ayant pour valeur ce qui manque à ϖ pour compléter la racine, il s'ensuit que ses trois valeurs formeraient avec ϖ les trois racines de la proposée. Cette première équation en z est donc une équation aux différences des trois racines.

Pareillement, z' ayant pour valeur ce qu'il faut retrancher de φ pour arriver à la racine, ses trois valeurs retranchées de φ donneront

donc encore les trois racines de la proposée en remontant de la plus grande racine à la plus petite ; cette deuxième équation est donc encore une équation aux différences des racines de la proposée.

Cette double équation est donc la décomposition de l'équation au quarré des différences des racines. On s'en convaincra encore plus en comparant cette dernière avec les deux équations simples qu'on vient d'obtenir ; car on a

$$z^6 - 2(A^2 - 3B)z^4 + (A^2 - 3B)^2 z^2 + 4A^3C - A^2B^2 - 18ABC + 4B^3 + 27C^2 = 0,$$

$$\text{ou } z^6 - 2rz^4 + r^2 z^2 \tfrac{1}{27}(SC - 2r\sqrt{r})(SC + 2r\sqrt{r}) = 0.$$

On aura cette même équation, si on multiplie entr'eux les coëfficiens des deux équations cidessus (152), indépendamment des quantités numériques qui les affectent : savoir, deux pour le coëfficient du deuxième terme et $\frac{1}{27}$ pour le coëfficient du dernier. On voit donc encore ici que le calcul des inéquations est le vrai mode de la décomposition algébrique.

152. En reprenant les deux équations (151), on voit que tant que les racines de la proposée seront réelles, les trois valeurs de z seront positives, à cause de $\left\{\begin{array}{l} x = -(\varpi + z) \text{ et } p_1 > \varpi \\ x = -(\varphi - z) \text{ et } p_3 < \varphi \end{array}\right.$

Les coëfficiens de ces deux équations doivent

donc être alternativement négatifs et positifs; c'est ce que l'on voit immédiatement, et l'on a à-la-fois pour le dernier terme

$$\left.\begin{array}{l} 2r\sqrt{r} - \mathcal{S}C > 0 \\ \text{et} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} \mathcal{S}C - 2r\sqrt{r} < 0, \\ \mathcal{S}C + 2r\sqrt{r} > 0. \end{array}\right.$$

Ce qui est conforme à ce qu'on a déjà vu (74).

153. S'il y a des racines imaginaires, et que $\sqrt{r}$ soit réel, il en résulte deux cas; 1°. si p_1 est réel, on aura (80)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{S}C - 2r\sqrt{r} > 0 \\ \mathcal{S}C + 2r\sqrt{r} > 0 \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} 2r\sqrt{r} - \mathcal{S}C < 0 \\ 2r\sqrt{r} + \mathcal{S}C > 0 \end{array}\right\} \text{ou} \left\{\begin{array}{l} c < 0, \\ \gamma > 0; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que le dernier terme de l'équation en z sera positif au lieu d'être négatif, tandis que ses autres coëfficiens conserveront l'alternative des coëfficiens positifs et négatifs qui appartient aux équations dont les racines sont positives; c'est-à-dire que la plus petite quasi-valeur de z sera négative (109).

Le dernier terme de l'équation en z' sera négatif, et alors les coëfficiens de tous ses termes conservant la règle de l'alternative des signes positifs et négatifs, toutes ses valeurs seront positives. C'est aussi ce qui doit avoir lieu, car on a dans ce cas $p_1 < \varpi$, $p_3 < \varphi$; il n'y a que ϖ qui change de direction, et comme

cette quasi-valeur est alors trop grande, il faut que son complément z soit négatif.

Dans le deuxième cas, lorsque c'est ρ, qui est réel, on a (80)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{S}C - 2r\sqrt{r} < 0 \\ \mathcal{S}C + 2r\sqrt{r} < 0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2r\sqrt{r} - \mathcal{S}C > 0 \\ 2r\sqrt{r} + \mathcal{S}C < 0 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c > 0\,; \\ \gamma < 0\,; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que le dernier terme de l'équation en z sera négatif, et par conséquent ses trois valeurs seront positives. Au contraire, le dernier terme de l'équation en z' étant positif, et tous les autres coëfficiens conservant l'alternative des signes additionnels, sa petite valeur est seule négative, ce qui doit encore avoir lieu, car on a dans ce deuxième cas $p > \varpi$, $p > \varphi$; la seule quasi-valeur φ a changé de direction, elle est alors trop petite, il faut donc que z' soit négatif pour la compléter dans l'équation $x = -(\varphi - z')$.

Ainsi la nature des coëfficiens des deux équations aux différences (151), détermine si les racines de la proposée sont toutes réelles, s'il y en a d'imaginaires, et quel rang elles tiennent dans l'équation.

Quand le radical originel est imaginaire, ou quand on a $\sqrt{-r}$, alors tous les coëfficiens de dimension impaire sont imaginaires, c'est le cas où π et φ appartiennent à la paire de

racines imaginaires, leurs complémens z_1 et z'_1 doivent être imaginaires.

Maintenant, je remarque que les deux équations en z et z' ne diffèrent que par le signe qui précède $\mathcal{S}C$, je les réunis en une seule et

154. Au lieu de $\left\{\begin{array}{l} z^3 - az^2 + bz - c = 0 \\ z'^3 - az'^2 + bz' - \gamma = 0 \end{array}\right\}$ j'ai

$$z^3 - 2\sqrt{r}z^2 + rz - \left(\frac{2r\sqrt{r} \mp \mathcal{S}C}{27}\right) = 0.$$

Ainsi cette équation est *la double équation aux différences simples.*

Pour la résoudre, je l'ai ramenée à l'équation générale

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

parce que les racines par leur nature sont positives quand celles de la proposée sont toutes réelles, et je la décompose en ces deux facteurs $(z^2 - \Delta Pz + \Delta Q)(z - \Delta p) = 0$. Je me sers du caractère Δ, que je ferai précéder des mêmes lettres que celles qui ont été employées dans la résolution directe de la proposée ; ainsi $\Delta\pi$ correspondra à π et signifiera *quasi-valeur du complément de* π et ainsi des autres.

Maintenant, en résolvant cette équation aux racines positives, comme ci-dessus (115), on aura les mêmes directions pour les quasi-

valeurs que celles qu'on a obtenues en résolvant l'équation aux racines négatives

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = o,$$

les quasi-valeurs seront également positives dans l'équation en z et dans l'équation en Δp, et par ce moyen on évitera toute effectuation de signe pour passer de l'un à l'autre.

155. J'ai d'abord

$$\sqrt{a^2 - 3b} = \sqrt{4r - 3r} = \sqrt{r} = \sqrt{A^2 - 3B}.$$

$$\Delta P < \tfrac{1}{3}(a + \sqrt{r}) = < \tfrac{1}{3}(2\sqrt{r} + \sqrt{r}) = < 1\sqrt{r} = < \Delta\Pi.$$

$$\Delta p_1 > \tfrac{1}{3}(a - 2\sqrt{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots = > o \ldots = > \Delta\varpi.$$

$$\Delta P > \tfrac{1}{3}(a - \sqrt{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots = > \tfrac{1}{3}\sqrt{r} = > \Delta\Phi.$$

$$\Delta p_1 < \tfrac{1}{3}(a + 2\sqrt{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots = < \tfrac{4}{3}\sqrt{r} = < \Delta\varphi.$$

Ces quatre quasi-valeurs originelles sont les mêmes pour le complément de ϖ et φ, parce que le dernier c et γ, qui fait la différence des deux équations, ne s'y trouve pas.

La petite quasi-valeur originelle $= o$, mais en la complétant, elle est différente pour ϖ et pour φ, on a

Pour ϖ. . . . $k\Delta\varpi = \dfrac{c}{b - \Delta\Pi\varpi} = \dfrac{c}{b} = \left(\dfrac{2r\sqrt{r} - SC}{27r}\right)$

Pour φ. . . . $k\Delta\varpi = \dfrac{\gamma}{b - \Delta\Pi\varpi} = \dfrac{c}{b} = \left(\dfrac{2r\sqrt{r} + SC}{27r}\right)$

Et pour les deux complémens $k\Delta\varpi = \left(\dfrac{2r\sqrt{r} \mp SC}{27r}\right)$.

156. Maintenant, en appliquant la formule de solution (127), j'ai

$$z_1\begin{cases} > \dfrac{C}{b-\Delta\Pi\varpi} \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \dfrac{C}{\varphi\Delta}} \end{cases} \qquad z'_1\begin{cases} > \dfrac{\gamma}{b-\Delta\Pi\varpi} \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \dfrac{\gamma}{\Delta\varpi}} \end{cases}.$$

$$z_3\begin{cases} < \Delta\varphi \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Pi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Pi^2 - \dfrac{C}{\Delta\varpi}} \end{cases} \qquad z'_3\begin{cases} < \Delta\varphi. \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Pi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Pi^2 - \dfrac{\gamma}{\Delta\varpi}} \end{cases}.$$

On voit que la double limite de z_3 et de z'_3 qui est irréductible, est infiniment imaginaire à cause de $\Delta\varpi = 0$. En prenant la double limite de z_1 et z'_1, et substituant les valeurs, on a

157. Pour complément de ϖ,

$$z_1\begin{cases} > \dfrac{2r\sqrt{r} - 8C}{27r} \\ < \left(\sqrt{r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r + \dfrac{8C\sqrt{r}}{r}}\right). \end{cases}$$

Pour complément de φ,

$$z'_1\begin{cases} > \dfrac{2r\sqrt{r} + 8C}{27r} \\ < \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r - \dfrac{8C\sqrt{r}}{r}}\right); \end{cases}$$

et en réunissant dans une seule formule les

deux formules de z_1 et de z'_1, on a pour tous les deux

$$158.\quad z_1 \begin{cases} > \dfrac{2r\sqrt{r} \mp SC}{27r}. \\ < \frac{1}{3}\left(\sqrt{r} - \frac{1}{2}\sqrt{2r \pm \dfrac{SC\sqrt{r}}{r}}\right. \end{cases}$$

Dans toutes ces formules réunies en une seule le signe supérieur du double signe additionnel appartient au complément de π et le signe inférieur au complément de φ.

Par le moyen de cette formule, on circonscrit entre deux limites opposées les quasi-valeurs qui doivent compléter les deux racines extrêmes de la proposée. Voilà pourquoi j'ai appelé double ce deuxième mode de solution, qui est le vrai mode pratique de la résolution des équations. Ce mode sera le même pour les équations de tous les autres degrés. De sorte qu'on ne décompose une équation quelconque qu'en l'entamant par ses valeurs extrêmes. Il reste un noyau d'équation qu'on résout ensuite par les formules des degrés inférieurs.

159. Maintenant, si les trois racines sont réelles, on peut remarquer que la limite supérieure de cette formule est positive pour les deux complémens de π et de φ, d'après ce qu'on

a vu (74); car on a à-la-fois pour les deux signes $2r\sqrt{r} \mp \delta C > 0$.

C'est en conséquence de cela que le grand radical de la limite inférieure est toujours réel, lorsque les trois racines de la proposée sont réelles, soit que l'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur qui précède δC; c'est-à-dire que cette limite est également réelle pour le complément de π et de φ. Ainsi, dans ce cas, toutes les quasi-valeurs de cette formule ont la forme qui leur convient; elles ne contiennent plus de quantités irréductibles, parce qu'on n'a employé pour la former que des valeurs réductibles.

160. Maintenant, s'il y a deux racines imaginaires et que $\sqrt{r}$ soit réel, ce cas se subdivise en deux :

1°. p_t étant réel, on a

$$\left.\begin{matrix}\delta C - 2r\sqrt{r} > 0 \\ \delta C + 2r\sqrt{r} > 0\end{matrix}\right\} \text{ou} \left\{\begin{matrix}2r - \delta C < 0, \\ 2r + \delta C > 0;\end{matrix}\right.$$

donc dans ce cas le grand radical de la formule (158) sera réel avec le signe + qui précède δC et imaginaire avec le signe —; c'est-à-dire que la deuxième quasi-valeur du complément de π sera réelle, et celle du complément de φ sera imaginaire; elles auront donc l'une et l'autre la forme qui leur convient.

Cette deuxième limite aura aussi le signe additionnel qui lui convient pour le complément de π et de φ ; c'est-à-dire qu'elle sera négative pour le premier et positive pour le deuxième (158), car supposons que cela soit, on aura

Pour complément de π,	Pour complément de φ,
$\sqrt{r} < \frac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}}$	$\sqrt{r} > \frac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}$
$4r^2 < 2r^2 + SC\sqrt{r}$	$4r^2 > 2r^2 - SC\sqrt{r}$.
$2r\sqrt{r} < SC$	$2r\sqrt{r} > -SC$.
$SC - 2r\sqrt{r} > 0$	$SC + 2r\sqrt{r} > 0$.

Ainsi l'on voit que la deuxième limite de la formule (158) a la forme et le signe qui lui conviennent d'après la relation des coëfficiens.

2°. Si p_3 est réel, on a

$$\left.\begin{matrix} SC - 2r\sqrt{r} < 0 \\ SC + 2r\sqrt{r} < 0 \end{matrix}\right\} \text{ou} \left\{\begin{matrix} 2r - SC > 0, \\ 2r + SC < 0; \end{matrix}\right.$$

donc le grand radical de la formule (158) sera réel avec le signe — qui précède SC et imaginaire avec le signe + ; donc la deuxième limite du complément de π sera imaginaire et celle du complément de φ sera réelle ; elles auront donc encore l'une et l'autre la forme qui leur convient ; on prouvera de même que pour le premier cas qu'elles ont aussi le signe additionnel qui leur convient, c'est-à-dire que

la limite pour π est positive et celle pour φ négative.

Il faut remarquer maintenant que la formule sert à compléter toute espèce d'équation, quel que soit le signe de ses racines; car on a dans tous les cas $p > \pi$, $p < \varphi$, quand les racines sont réelles : si π est négatif, sa valeur numérique est trop grande, mais la valeur de z, qui fait son complément, est toujours positive, car dans l'équation $x = -(\pi + z)$ il faut que la quantité positive de z diminue la quantité négative de π numériquement trop grande.

Quand les racines sont imaginaires, on a par exemple pour p_1 réel, $p_1 < \pi$, $p_3 < \varphi$; mais si π est négatif, il est numériquement trop petit, il faut que dans l'équation $x = -(\pi + z)$ z soit du même signe que π pour compléter sa valeur négative.

161. Maintenant, lorsque le radical originel est imaginaire, tous les élémens de l'équation en z sont affectés de quantités imaginaires. Ce cas exige une opération particulière, pour séparer les racines et en faire ressortir la quasi-valeur de la racine réelle. Avant de m'en occuper, je vas appliquer ce deuxième mode de solution aux deux exemples du tableau qui ont leurs racines incommensurables pour faire voir avec quelle précision on peut l'appro-

cher de la valeur exacte des racines. Je prends d'abord l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

ses racines, qui sont de différens signes, sont toutes réelles, parce qu'on a $SC - 2r\sqrt{r} < 0$, $SC + 2r\sqrt{r} > 0$; j'ai d'abord pour le radical et les quatre quasi-valeurs originelles

$$\sqrt{r} = \quad 4{,}582\ 575\ 694\ 955\ 7.$$
$$P < \Pi = \quad < 3{,}055\ 050\ 463\ 303\ 8.$$
$$p_1 > \varpi = - < 3{,}055\ 050\ 463\ 303\ 8.$$
$$P > \Phi = - < 3{,}055, \text{ etc.}$$
$$p_3 > \varphi = \quad < 3{,}055, \text{ etc.}$$

J'ai ensuite pour les quasi-valeurs de l'équation de complément ou de l'équation en z et z'

$$a = (2\sqrt{r}) \ldots\ldots\ldots = 9{,}165\ 151\ 389\ 911\ 4.$$
$$b = (r), \ldots\ldots\ldots\ldots = 21.$$
$$c = \left(\frac{2r\sqrt{r} - SC}{27}\right). = 14{,}128\ 451\ 081\ 045\ 9.$$
$$\gamma = \left(\frac{2r\sqrt{r} + SC}{27}\right). = 0{,}128\ 451\ 081\ 045\ 9.$$
$$\Delta\Pi = (2\sqrt{r}) = a\ldots = 9{,}165, \text{ etc.}$$
$$\Delta\varpi = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$
$$\Delta\Phi = (\tfrac{2}{3}\sqrt{r}) \ldots\ldots = 3{,}055\ 050\ 463\ 303\ 8.$$
$$\Delta\varphi = (\tfrac{4}{3}\sqrt{r}) \ldots\ldots = 6{,}110\ 100\ 926\ 607\ 6.$$

Je vois encore par la valeur positive des quasi-



valeurs originelles que les trois racines sont réelles.

Je commence par prendre les quasi-valeurs de z et de z' avec la formule (123), seulement avec les quatre premières décimales, et j'ai

$$z_i\begin{cases}>\left(\dfrac{2r\sqrt{r}-SC}{27r}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots=>0{,}6728..=k\Delta\pi.\\ <\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2r+\dfrac{SC\sqrt{r}}{r}}\right)=<1{,}3954..=\xi.\end{cases}$$

$$z_i\begin{cases}>\left(\dfrac{2r\sqrt{r}+SC}{27}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots=>0{,}006117=k\Delta\pi.\\ <\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2r-SC\sqrt{r}}{r}}\right)..=<0{,}0069..=\xi'.\end{cases}$$

Je commence par concentrer les deux limites de z' qui appartiennent au complément de φ; elles ont, comme on voit, les trois premières décimales communes, et j'employe la formule $\dfrac{c'}{b-\Delta\Pi\pi}$, ou en général la formule $\dfrac{C}{B-\Pi\pi}$.

Je prends d'abord la limite moyenne entre les deux limites opposées

$z_i\begin{cases}>0{,}006117\\ <0{,}0069..\end{cases}$ moyenne.....$=0{,}0065=\mu$:

en la concentrant j'ai.......$k\mu=0{,}006134$.

Puisque la concentration a diminué cette valeur moyenne, je conclus qu'elle est trop

grande, et que $z'<k\mu$; j'ai donc

$$z'\begin{cases}>0{,}006117\\<0{,}006134\end{cases}\text{moyenne}\ldots\ldots=0{,}006125=\mu' :$$

en la concentrant j'ai

$$k\mu'=0{,}00613305 5.$$

Donc dans ce cas la quasi-valeur moyenne étant trop petite, j'ai donc

$$z'\begin{cases}<k\mu=<0{,}006134\ldots\\>k\mu'=>0{,}00613305 5\end{cases}\mu''=0{,}006133527 5 :$$

en concentrant j'ai

$$k\mu''=0{,}0061331249,$$

d'où

$$z'\begin{cases}>k\mu'=>0{,}00613305 5\ldots\\<k\mu''=<0{,}00613312495\end{cases}\mu'''=0{,}0061330899 :$$

en concentrant j'ai

$$k\mu'''=0{,}0061331237 3,$$

d'où

$$z'\begin{cases}<k\mu''=<0{,}00613312495\\>k\mu'''=>0{,}00613312373\end{cases}\mu^{\text{iv}}=0{,}0061331243 2 :$$

en concentrant j'ai

$$k\mu^{\text{iv}}=0{,}0061331237 83,$$

d'où

$$z'\begin{cases}>k\mu'''=>0{,}00613312373\\<k\mu^{\text{iv}}=<0{,}006133123783\end{cases}\mu^{\text{v}}=0{,}006133123756 :$$

Je m'arrête à ce degré de concentration : la quasi-valeur de z' a ses dix premières décimales communes aux deux limites opposées, et par conséquent exactes; la onzième ne peut pas différer de deux unités au-delà de sa vraie valeur.

Maintenant, d'après l'équation $x_3 = -(\varphi - z')$, je retranche cette quasi-valeur de celle de φ exprimée ci-dessus, et j'ai

$$x_3 = -3,04891733955.$$

On pourrait à présent trouver les deux autres racines par la résolution d'une équation du deuxième degré; mais je vais encore concentrer la quasi-valeur de x_1, pour faire voir comment se comporte cette méthode de concentration relativement aux différentes racines; j'ai d'abord

$$z\begin{cases} > k\Delta\varpi = > 0,6728, \\ < \xi = < 1,3954. \end{cases}$$

Comme ces deux limites diffèrent assez entre elles pour n'avoir aucun chiffre qui leur soit commun, je leur fais faire à l'une et à l'autre un pas de concentration pour connaître leur distance respective de la vraie valeur

je fais $k\Delta\varpi = 0,7$
j'ai... $k'\Delta\varpi = 0,937$ } différence 0,237;

$$\left.\begin{array}{l}\text{je fais } \xi = 1{,}39 \\ \text{j'ai.. } k\xi = 1{,}386\end{array}\right\} \text{différence } 0{,}004.$$

Je vois que cette dernière limite est beaucoup plus près du centre de la valeur que la première. Je concentre donc cette première pour la rapprocher jusqu'à ce que son pas de concentration soit à-peu-près le même ou jusqu'à ce que j'obtienne une différence à-peu-près égale. J'ai donc

$$\begin{array}{ll} k\ \Delta\varpi = 0{,}94 & \\ & \text{différence } 0{,}124. \\ k'\ \Delta\varpi = 1{,}064 & \\ & \dots\dots\dots\ 0{,}077. \\ k''\ \Delta\varpi = 1{,}141 & \\ & \dots\dots\dots\ 0{,}0518. \\ k'''\Delta\varpi = 1{,}1928 & \end{array}$$

Je vois alors que la concentration est très-lente dans ce cas; cela vient de ce que les deux premières racines diffèrent peu l'une de l'autre. La concentration de la quasi-valeur de z' n'a été si rapide que parce que la racine dont elle est le complément diffère beaucoup des deux autres.

Pour la rendre aussi rapide, je reprends la quasi-valeur ci-dessus

$$k\xi = 1{,}386,$$

d'où

$$x = -(\varpi + z) = -> (-3{,}055 + 1386) => 1{,}669;$$

je fais

$$x = 1{,}7 + z;$$

et je substitue cette valeur dans la proposée; j'ai la nouvelle équation

$$z^3 + 5{,}1z^2 + 1{,}67z + 0{,}013 = 0,$$

que je fais

$$z^3 + \mathrm{a}z^2 + \mathrm{b}z + \mathrm{c} = 0;$$

parce qu'elle a, comme on voit, ses trois racines négatives, d'où l'on peut conclure déjà que la valeur supposée $x = 1{,}7$ est trop grande; la petite racine de z est le complément négatif de

$$x_1 = 1{,}7 + z:$$

je prends les deux limites opposées de cette petite racine; j'ai d'abord

$$\sqrt{\mathrm{a}^2 - 3\mathrm{b}} = \sqrt{r}.$$

$$\Delta\Pi = \ldots\ldots\ 6{,}455.$$
$$\Delta\varpi = \ldots\ldots -1{,}355.$$
$$\Delta\Phi = \ldots\ldots\ 0{,}345.$$
$$\Delta\varphi = \ldots\ldots\ 4{,}755.$$

$$z_1 - \begin{cases} > k\Delta\varpi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = - > 0{,}0012. \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \dfrac{c}{\Delta\varphi}} = - < 0{,}0081 = - < \xi. \end{cases}$$

Il est aisé de rapprocher ces deux limites à égale distance du centre de la valeur, car on voit que la limite $\Delta\pi$ se concentre rapidement; j'ai d'abord

$$\left.\begin{array}{l} \xi = -0{,}0081\ldots\ldots \\ k\xi = -0{,}00798167 \end{array}\right\} \text{différence } 0{,}00011833,$$

j'ai ensuite

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\varpi = -1{,}355\ldots\ldots \\ k\,\Delta\varpi = +0{,}0012\ldots\ldots \\ k'\Delta\varpi = 0{,}0078125. \\ k''\Delta\varpi = 0{,}00797045 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{différence } 1{,}3562. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}0066125. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}000157. \end{array}$$

Comme la différence du pas de concentration de $k\xi$ est à-peu-près le même que celui de $k''\Delta\varpi$; je prends la valeur moyenne μ, et j'ai

$$\mu = -0{,}00797606.$$
$$k\mu = -0{,}007978466.$$

Puisque la concentration va en augmentant, je conclus que l'on a $z - > k\mu$, mais la concentration de ξ à $kk\xi$ va en diminuant, $k\xi$ est donc trop grand; j'ai donc

$$z - \left\{\begin{array}{l} > k\mu = - > 0{,}007978466 \\ < k\xi = - < 0{,}00798167. \end{array}\right\} \mu' = -0{,}007980068;$$

en concentrant j'ai

$$k\mu' = -0{,}007978564.$$

Comme la concentration va en diminuant, j'ai

$$z - < k\mu';$$

j'ai donc

$$z - \left\{\begin{array}{l} > k\mu = - > 0{,}007978466 \\ < k\mu' = - < 0{,}007978564 \end{array}\right\} \mu'' = -0{,}0079785{,}15:$$

en concentrant j'ai

$$k\mu'' = -0,0079785274\,;$$

d'où

$$z-\left\{\begin{array}{l} <k\mu' = -<0,007978564\,. \\ >k\mu'' = ->0,0079785274 \end{array}\right\}\mu''' = -0,007978545\,:$$

en concentrant j'ai

$$k\mu''' = -0,00797852877\,,$$

d'où

$$z-\left\{\begin{array}{l} >k\mu'' = ->0,0079785274\,. \\ <k\mu''' = -<0,00797852877 \end{array}\right\}\mu^{\text{iv}} = -0,0079785281\,:$$

en concentrant j'ai

$$k\mu^{\text{iv}} = -0,00797852836\,,$$

d'où

$$z-\left\{\begin{array}{l} <k\mu''' = -<0,00797852877 \\ >k\mu^{\text{iv}} = ->0,00797852836 \end{array}\right\}\mu^{\text{v}} = -0,00797852856\,;$$

enfin j'arrive, après une dernière concentration, à la quasi-valeur

$$z_{,} = -0,0079785286$$

avec dix décimales exactes : ce qui me donne

$$x_{,} = 1,6920214714\,;$$

j'ai ci-dessus

$$x_{3} = -3,0489173395\,;$$

j'ai donc

$$x_{2} = 1,3568958601\,.$$

Telles sont les trois racines de la proposée

dont les valeurs sont exactes jusqu'à la dixième décimale.

J'aurais pu me contenter de prendre les trois premières décimales exactes, puis faire

$$x = 1,692 + z,$$

en substituant dans la proposée cette nouvelle valeur, j'aurais obtenu des quasi-valeurs de z qui se seraient concentrées avec une rapidité bien plus grande encore.

Soit proposé de résoudre encore l'équation suivante :

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

qui contient deux racines imaginaires, dont les trois valeurs sont incommensurables et de différens signes.

La double inéquation

$$SC \mp 2r\sqrt{r} < 0$$

fait conclure que p_1 est réel, et que l'on a

$$p < \pi_1,$$

on a d'abord pour la solution simple

$$\sqrt{A^2 - 3B} = \sqrt{6} = 2,44948974278.$$

$$P > \Pi = \quad > 1,63299316185.$$

$$p_1 < \pi = - > 1,63299316185.$$

$$P > \Phi = - < 1,63, \text{ etc.}$$

$$p_3 < \varphi = \quad < 1,63, \text{ etc.}$$

Et l'on a pour la partie réelle des deux imaginaires,

$$p_2 \text{ et } p_3 \begin{cases} < \varphi .. = < 1{,}632, \text{ etc.} \\ > \tfrac{1}{2}\Pi = > 0{,}816, \text{ etc.} \end{cases}$$

On a maintenant pour l'équation de complément en z et z'

$$\begin{aligned} a &= 4{,}89897948556. \\ b &= 6. \\ c &= -3{,}91133418839 4. \\ \gamma &= 6{,}08829173753 2. \end{aligned}$$

La valeur de c, étant négative, rend ce dernier terme positif, d'où l'on doit conclure que c'est la première racine qui est réelle (153). En ne prenant les quasi-valeurs qu'avec leurs premières décimales, on a

$$\begin{aligned} &\Delta P > \Delta \Pi = \ldots\ldots\ldots\ldots > 4{,}8989. \\ &\Delta p_1 < \Delta \varpi = \ldots\ldots\ldots\ldots < 0 = - > 0. \\ &\Delta P > \Delta \Phi = \ldots\ldots\ldots\ldots > 1{,}63299. \\ &\Delta p_3 < \Delta \varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots < 3{,}26589. \end{aligned}$$

On a pour complément de ϖ,

$$z_1 \begin{cases} > k \Delta \varpi (156) \ldots\ldots\ldots\ldots - < 0{,}65189. \\ < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \dfrac{C}{\Delta\varphi}} \ldots\ldots - < 1{,}3652. \end{cases}$$

Ces deux quasi-valeurs ayant le même signe d'inéquation, je vois immédiatement que c'est la valeur de $k\Delta\varpi$ qui approche le plus de la

racine ; je la concentre, et, comme elle est négative, j'aurai une série de concentration alternative et convergente ; et, dans tous les cas, la quasi-valeur $\Delta\varpi$ peut toujours se concentrer, qu'elle soit négative ou positive, puisqu'elle est $=0$, elle a la plus petite valeur numérique positive.

J'ai donc, en ne commençant la concentration qu'avec deux décimales,

$$\Delta p_1 - \left\{\begin{array}{l} < k\ \Delta\varpi = - < 0{,}65. \\ > k'\ \Delta\varpi = - > 0{,}4. \\ < k''\Delta\varpi = - < 0{,}48. \\ > k'''\Delta\varpi = - > 0{,}455. \\ < k^{\text{IV}}\Delta\varpi = - < 0{,}4636. \\ > k^{\text{V}}\Delta\varpi = - > 0{,}46089. \end{array}\right.$$

On voit combien la marche de cette série est lente, puisqu'après cinq pas de concentration les deux limites opposées n'ont encore que deux décimales communes, ces quasi-valeurs ont été obtenues en laissant aller la série sans prendre à chaque fois la quantité moyenne.

Pour rendre la marche de la concentration plus rapide, je prends la quasi-valeur

$$k^{\text{V}}\Delta\varpi \doteq -0{,}46,$$

et j'ai

$$z_1 - > 0{,}46,$$

puis

$$x_1 = -(\varpi + z)$$

donne

$$x_1 = -<(-1,633 - 0,46)$$

ou

$$x > 2,09;$$

je fais alors

$$x = 2,09 + z,$$

et en substituant dans la proposée, j'ai la nouvelle équation

$$z^3 + 6,27z^2 + 11,1043z - 0,50671 = 0,$$

qui contient comme la proposée deux racines imaginaires et une racine réelle, qui est évidemment la plus petite, c'est le complément de

$$x_1 = 2,09.$$

Cette équation a toutes ses racines négatives, excepté la première qui est la plus petite, elle appartient à

$$z^3 + ax^2 + bx + c = 0;$$

j'ai d'abord

$$\sqrt{a^2 - 3b} = \sqrt{r} = \sqrt{6},$$

comme dans la proposée ; puis

$$\Delta P > \Delta \Pi = > 5,813.$$

$$\Delta p_1 < \Delta \varpi = < 0,457.$$

Cette quasi-valeur devrait être négative en valeur de Δp pour être positive en valeur de x à cause de $x < 2{,}09$, et en outre le dernier coëfficient étant négatif, il en résulte que la plus petite racine est positive en x, et négative en Δp; mais il faut remarquer que $\Delta\varpi$ est ici positif par extradivergence, comme il est quelquefois négatif quand toutes les valeurs de p sont positives (54) : on va le voir par la concentration, j'ai donc

$$\Delta p_1 \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < 0{,}457. \\ > -0{,}006 = - < 0{,}006. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - > 0{,}004548. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - < 0{,}004551 5. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - > 0{,}0045514815. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - < 0{,}004551481542. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - > 0{,}00455148154232. \end{cases}$$

D'où j'ai

$$x_1 = 2{,}094551481542|32.$$

Ainsi, après cinq termes de concentration, j'aboutis à une quasi-valeur qui a quatorze décimales exactes ; car quoique je n'aie pas obtenu l'identité des deux dernières décimales trente-deux, néanmoins en observant la marche rapide de la concentration, on voit qu'elles se trouveraient les mêmes dans le sixième terme. Chaque terme de concentration n'exi-

geant qu'une multiplication et une division, on voit que les opérations qui conduisent aux valeurs des racines sont beaucoup plus courtes et plus simples que celles qu'exige l'extraction d'une simple racine cubique par la méthode connue de l'arithmétique.

Il faut remarquer que dans cette dernière concentration j'ai simplement laissé aller la série sans prendre la valeur moyenne par la méthode de compensation, j'aurais retardé la marche de la concentration au lieu de l'avancer; car quand les séries sont rapides, chaque terme ne dépasse la valeur vraie que d'une partie très-petite de la latitude.

Je ne m'occuperai pas ici de la limite opposée qui appartient à la paire de racines imaginaires; sa partie rationnelle n'est pas susceptible de concentration. Pour la concentrer il faut prendre l'équation en P de la proposée (147), on la résoudra comme celle-ci, et la valeur réelle de cette équation donnera la paire des deux racines imaginaires quant à leur partie réelle.

162. La double formule des quasi-valeurs de z et z' (158) va nous servir à séparer les différentes racines de la proposée : d'abord de

$$x_1 = -(\varpi + z) \text{ et de } z \begin{cases} > k\Delta\varpi, \\ < \xi, \end{cases}$$

j'aurai

$$x_1 - \begin{cases} > \varpi > k\Delta\varpi, \\ < \varpi + \xi, \end{cases}$$

ensuite de

$$x_3 = -(\varphi - z') \text{ et de } z' \begin{cases} < k\Delta\varphi, \\ > \xi', \end{cases}$$

j'aurai

$$x_3 - \begin{cases} < \varphi - k\Delta\varphi, \\ > \varphi - \xi'; \end{cases}$$

enfin j'aurai

$$x_2 \parallel A - (x_1 + x_2);$$

en substituant toutes les valeurs j'aurai les formules

$$x_1 - \begin{cases} > \frac{1}{3}\left(A - \frac{SC}{9r} - \frac{16\sqrt{r}}{9}\right) \\ < \frac{1}{3}\left(A - \sqrt{r} - \frac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right) \end{cases}$$

$$x_2 - \begin{cases} \parallel \frac{1}{3}\left(A - \frac{2SC}{9r}\right) \\ \parallel \frac{1}{3}\left(A + \frac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}} - \frac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right) \end{cases}$$

$$x_3 - \begin{cases} < \frac{1}{3}\left(A - \frac{SC}{9r} + \frac{16\sqrt{r}}{9}\right) \\ > \frac{1}{3}\left(A + \sqrt{r} + \frac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right) \end{cases}$$

J'ai mis le signe $\parallel$ pour les quasi-valeurs de x_2, leur direction dépend de la différence

plus ou moins des deux racines extrêmes avec la moyenne, il est inutile de la déterminer; mais il est clair qu'elles doivent être opposées l'une à l'autre.

Cette formule sépare les trois racines de la proposée en quasi-valeurs qui ont toutes la forme qui leur convient. Mais il faut remarquer que cette séparation des trois racines n'a lieu que pour le troisième degré. La méthode ne sépare que les deux racines extrêmes de l'équation par deux limites opposées, et c'est parce qu'il ne reste plus qu'une racine au centre qu'elles se trouvent toutes les trois séparées. Dans les degrés plus élevés il reste au centre une équation abaissée de deux degrés qu'on résout ensuite après qu'on en a séparé les racines extrêmes que l'on obtient aussi exactement que l'on veut, comme on vient de le voir.

Mais il faut observer que cette formule à doubles limites opposées, n'appartient qu'aux équations dont toutes les racines sont réelles; quand il y a des racines imaginaires, les limites supérieures de chaque racine imaginaire appartenant à la résolution en p ne peuvent appartenir qu'à la partie réelle de ces racines; et dans ce cas les deux limites qui appartiennent à la racine réelle ont la même direction : je

supprime ces limites pour avoir la formule générale :

Formule de décomposition algébrique.

163. $x_1 - < \frac{1}{3}\left(A - \sqrt{r} - \frac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right)$

$x_2 - \| \frac{1}{3}\left(A + \frac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}} - \frac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right)$

$x_3 - < \frac{1}{3}\left(A + \sqrt{r} + \frac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right)$

Telle est la formule générale et ultérieure de solution que j'appelle *formule de décomposition algébrique*, parce qu'on en fera usage dans la deuxième partie pour la résolution des équations à plusieurs variables ; elle sépare, dans tous les cas, les quasi-valeurs des racines avec la forme qui leur convient, et avec une première approximation déjà assez rapprochée.

D'abord, si les trois racines sont réelles, toutes les expressions sont réelles, comme on l'a déjà vu.

Ensuite, quand il y a dans l'équation des racines imaginaires, on peut les séparer de la racine réelle par le moyen de cette formule, soit que $\sqrt{r}$ soit réelle ou imaginaire.

1°. Si $\sqrt{r}$ est réelle, la partie imaginaire dépend des deux grands radicaux

$$\sqrt{2r + \frac{SC\sqrt{r}}{\sqrt{r}}} \text{ et } \sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}};$$

Dans le cas où x_1 est réelle, on a

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{S}C - 2r\sqrt{r} > 0\\ \mathcal{S}C + 2r\sqrt{r} > 0\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}2r\sqrt{r} - \mathcal{S}C < 0,\\ 2r\sqrt{r} + \mathcal{S}C > 0.\end{array}\right.$$

x_1 a son expression toute réelle, ensuite x_2 et x_3 ont, pour leur partie imaginaire, le même radical

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{\mathcal{S}C\sqrt{r}}{r}}$$

avec un signe opposé, comme il convient. Quant à la partie réelle qui doit être la même dans les deux racines, elle a deux limites, savoir :

$$\tfrac{1}{3}\left(A + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{\mathcal{S}C\sqrt{r}}{r}}\right)$$

qui correspond à x_2 et

$$\tfrac{1}{3}(A + \sqrt{r}) = \tfrac{1}{3}\Pi,$$

qui correspond à x_3, et qui par conséquent doit être précédée du signe $<$.

En faisant la même séparation pour le cas où x_3 est réelle, on aura

164.
$$\begin{array}{l}\mathcal{S}C - 2r\sqrt{r} > 0\\ \mathcal{S}C + 2r\sqrt{r} > 0\end{array}\left|\begin{array}{l} x_1 - < \tfrac{1}{3}\left(A - \sqrt{r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{\mathcal{S}C\sqrt{r}}{r}}\right)\\ \begin{array}{l}x_2\\ x_3\end{array} - \left\{\begin{array}{l} > \tfrac{1}{3}(A + \sqrt{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \| \ \tfrac{1}{3}\left(A + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{\mathcal{S}C\sqrt{r}}{r}}\right)\end{array}\right\} \mp \tfrac{1}{2.3}\sqrt{2r - \frac{\mathcal{S}C\sqrt{r}}{r}}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} SC-2r\sqrt{r}<0 \\ SC+2r\sqrt{r}<0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} <\frac{1}{3}(\Delta-\sqrt{r})\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \parallel \frac{1}{3}\left(\Delta-\frac{1}{2}\sqrt{2r+\frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right) \end{array}\right\} \mp\frac{1}{2\cdot3}\sqrt{2r+\frac{SC\sqrt{r}}{r}} \\ x_1 - > \frac{1}{3}\left(\Delta+\sqrt{r}+\frac{1}{2}\sqrt{2r-\frac{SC\sqrt{r}}{r}}\right) \end{array}\right.$$

On peut encore prendre pour la partie réelle des racines imaginaires

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} >\varpi \\ <\frac{1}{2}\Phi \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array}\right. - \left\{\begin{array}{l} <\varphi. \\ >\frac{1}{2}\Pi. \end{array}\right.$$

En appliquant cette formule à l'équation

$$x^3-2x-5=0,$$

j'ai, en prenant pour la partie réelle des deux imaginaires, la valeur moyenne des deux limites opposées.

Quasi-valeurs,

$$x_1 < \quad 2,1708.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| \quad 1,0854 \mp 1,0932\sqrt{-1}.$$

Valeurs exactes,

$$x_1 = \quad 2,09455\text{, etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = -1,04727\text{, etc.} \mp 1,136\sqrt{-1}.$$

Si, en conséquence de la quasi-valeur réelle, on faisait

$$x = 2,1 + z,$$

et qu'on substituât cette valeur de x dans la

proposée, on aurait immédiatement une équation en z, dont la petite racine, qui serait le supplément de x_1, se concentrerait aussi rapidement que celle de l'équation ci-dessus qu'on a obtenue en faisant

$$x = 2{,}09 + z\,,$$

la quasi-valeur serait ici négative.

2°. Quand $\sqrt{r}$ est imaginaire, la formule de décomposition ci-dessus ne peut pas servir telle qu'elle est, toutes les expressions seraient affectées de quantités imaginaires ; pour en séparer la racine réelle, il faut d'abord dégager la quantité imaginaire, contenue dans le grand radical ; ce qu'on obtiendra par la résolution du radical

$$\sqrt{f \pm \sqrt{-h}}\,,$$

ci-dessus (136) ; je fais ressortir, dans ce cas, le signe intrinséquement négatif de r pour que les formules présentent extérieurement la forme réelle ou imaginaire qui leur appartient. Alors

$$\sqrt{2r - \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\,,$$

devient

$$\sqrt{-2r + \frac{SC\sqrt{r}}{r}}\,,$$

et ainsi des autres, et l'on a

165. $SC>0 \begin{cases} \sqrt{-2r-\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}=\left(\sqrt{f-\sqrt{-h}}\right)=\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}-\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}} \\ \sqrt{-2r+\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}=\left(\sqrt{f+\sqrt{-h}}\right)=\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}+\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}; \end{cases}$

$SC<0 \begin{cases} \sqrt{-2r-\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}=\left(\sqrt{f+\sqrt{-h}}\right)=\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}+\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}, \\ \sqrt{-2r+\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}=\left(\sqrt{f-\sqrt{-h}}\right)=\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}-\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}, \end{cases}$

On voit ici que le grand radical

$$\sqrt{-2r\mp\frac{SC\sqrt{r}}{r}},$$

qui est le même que

$$\sqrt{2r\pm\frac{SC\sqrt{r}}{r}}$$

quand on laisse r intrinsèquement négatif, est décomposé en deux radicaux, dont le premier ne renferme que des quantités réelles, et l'autre est une expression imaginaire simple : car d'abord le radical intérieur

$$\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}$$

est nécessairement réel (r étant intrinsèquement positif). Ensuite le premier des deux radicaux

$$\sqrt{-r+\tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}$$

est toujours réel, car on a évidemment

$$r < \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 + \frac{SC^2}{r}},$$

et l'autre est imaginaire.

Maintenant pour appliquer ces valeurs à la formule de décomposition (168), j'observe d'abord que les deux quasi-valeurs originelles ϖ et φ appartiennent à la paire de racines imaginaires, l'une des deux doit donc être complettée par z, et l'autre par z'; je remonte en conséquence aux deux inéquations en $\Delta\Phi$ et en $\Delta\Pi$, et j'ai, pour complément de ϖ,

$$z_1 < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \frac{c}{\Delta\phi}} = < \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-2r - \frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right)$$

$$z_2 > \tfrac{1}{2}\Delta\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \frac{c}{\Delta\phi}} = > \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-r} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-2r - \frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right)$$

Pour complément de φ, on a

$$z_1' < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \frac{\gamma}{\Delta\phi}} = < \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-2r + \frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right)$$

$$z_2' > \tfrac{1}{2}\Delta\Phi + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Delta\Phi^2 - \frac{\gamma}{\Delta\phi}} = > \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{-r} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-2r + \frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right)$$

Maintenant en appliquant ces quasi-valeurs de z et de z' à x, il faut les disposer de manière que chaque paire de racines ait une quasi-valeur complétée par z, et l'autre par-

z', on a donc

$$x_1 -\!< \tfrac{1}{3}\left(A-\sqrt{-r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2r-\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right) \text{ complétée par } z_1.$$

$$x_2 -\!< \tfrac{1}{3}\left(A+\sqrt{-r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-2r+\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ par } z_2'.$$

$$x_2 -\!> \tfrac{1}{3}\left(A-\sqrt{-r}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-2r-\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ par } z_2.$$

$$x_3 -\!> \tfrac{1}{3}\left(A+\sqrt{-r}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-2r+\frac{SC\sqrt{-r}}{r}}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ par } z_1'.$$

En substituant maintenant les valeurs des grands radicaux, on a

$$166. \quad SC > 0 \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 -\!< \tfrac{1}{3}(A-\sqrt{-r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-R'}) \\ x_2 -\!< \tfrac{1}{3}(A+\sqrt{-r}-\tfrac{1}{2}\sqrt{R}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-R'}) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 -\!> \tfrac{1}{3}(A-\sqrt{-r}+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-R'}) \\ x_3 -\!> \tfrac{1}{3}(A+\sqrt{-r}+\tfrac{1}{2}\sqrt{R}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-R'}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il est clair maintenant que c'est la deuxième paire qui correspond aux deux racines imaginaires de l'équation (137). Quant à la racine réelle, je puis la prendre avec deux limites différentes et opposées. D'abord je l'aurai en prenant la moitié de la somme de l'autre paire de quasi-valeurs qui me donnera

$$x_1 -\!< \tfrac{1}{3}(A-\tfrac{1}{2}\sqrt{R});$$

en deuxième lieu, j'aurai une autre limite en retranchant de A la somme des deux racines

14

imaginaires, en faisant donc

$$x_1 = -(A - (x_2 + x_3)),$$

j'aurai

$$x_1 -> \tfrac{1}{3}(A - \sqrt{R});$$

on aura donc, dans le cas où $\mathcal{S}C > o$,

$$167.\quad \mathcal{S}C > o \begin{cases} x_1 - \begin{cases} < \frac{1}{3}(A - \frac{1}{2}\sqrt{R}) \\ > \frac{1}{3}(A - \sqrt{R}) \end{cases} \\ \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} - \Big\{ -> \frac{1}{3}(A + \frac{1}{2}\sqrt{R}) \mp \frac{1}{2}(\sqrt{-r} + \sqrt{-R'}). \end{cases}$$

En opérant de même dans le cas où $\mathcal{S}C < o$, on a d'abord

$$168.\quad \mathcal{S}C < o \begin{cases} \begin{cases} x_1 - < \frac{1}{3}(A - \sqrt{-r} - \frac{1}{2}\sqrt{R} - \frac{1}{2}\sqrt{-R'}) \\ x_2 - < \frac{1}{3}(A + \sqrt{-r} - \frac{1}{2}\sqrt{R} + \frac{1}{2}\sqrt{-R'}) \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 - > \frac{1}{3}(A - \sqrt{-r} + \frac{1}{2}\sqrt{R} + \frac{1}{2}\sqrt{-R'}) \\ x_3 - > \frac{1}{2}(A + \sqrt{-r} + \frac{1}{2}\sqrt{R} - \frac{1}{2}\sqrt{-R'}) \end{cases} \end{cases}$$

D'où je conclus ainsi les trois quasi-valeurs de x,

$$169.\quad \mathcal{S}C < o \begin{cases} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} - \Big\{ < \frac{1}{3}(A - \frac{1}{2}\sqrt{R}) \mp \frac{1}{3}(\sqrt{-r} + \sqrt{-R'}) \\ x_3 - \begin{cases} > \frac{1}{3}(A + \frac{1}{2}\sqrt{R}) \\ < \frac{1}{3}(A + \sqrt{R}) \end{cases} \end{cases}$$

Si je joins ensembles les deux formules pour $\mathcal{S}C > o$ et $\mathcal{S}C < o$, j'aurai, en substituant les valeurs de $\sqrt{R}$, et R' $\sqrt{-R'}$, la formule suivante :

170.

$$SC>0\left\{\begin{array}{l} x_1 \left\{\begin{array}{l} <\frac{1}{3}\left(A-\frac{1}{2}\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right), \\ >\frac{1}{3}\left(A-\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right), \end{array}\right. \\ \begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array} - \left\{ >\frac{1}{3}\left(A+\frac{1}{2}\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right) \mp \frac{1}{3}\left(\sqrt{-r}+\frac{1}{2}\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right);\right. \end{array}\right.$$

$$SC<0\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} - \left\{ <\frac{1}{3}\left(A+\frac{1}{2}\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right) \mp \frac{1}{3}\left(\sqrt{-r}+\frac{1}{2}\sqrt{-r-\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right),\right. \\ x_3 \left\{\begin{array}{l} >\frac{1}{3}\left(A+\frac{1}{2}\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right), \\ <\frac{1}{3}\left(A+\sqrt{-r+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+\frac{SC^2}{r}}}\right). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En appliquant cette formule au dix-septième et au dix-huitième exemple du tableau, on a pour la racine réelle du premier,

$$x_1 - \left\{\begin{array}{l} < 1,303. \\ > 0,9466. \end{array}\right.$$

La racine vraie $= -1$, et pour le deuxième,

$$x_3 - \left\{\begin{array}{l} > 1,44. \\ < 2,32. \end{array}\right.$$

La racine vraie $= -2$.

Je vais l'appliquer à l'équation

$$x^3 + 3x^2 + 2x + 15 = 0,$$

ci-dessus (106), dont la valeur réelle ne peut se concentrer par la série de concentration, parce que toutes les parties réelles des racines ne sont pas du même signe. On a dans ce cas

$$\sqrt{-r} = \sqrt{-2},$$

et la valeur réelle, d'après cette formule, est

$$x_3 - \begin{cases} > 2,563, \\ < 4,441; \end{cases}$$

la valeur moyenne de ces deux limites est

$$x_3 - \| \; 3,5;$$

je fais alors

$$x = -(3,5 + z),$$

et je substitue cette valeur dans la proposée, et j'ai l'équation

$$z^3 + 8,5\,z^2 + 24,75\,z + 10,25 = 0;$$

j'ai, comme dans la précédente, $r = -2$, je pourrais, d'après les formules qu'on vient d'exposer, prendre les deux limites opposées de sa valeur réelle; mais il est beaucoup plus simple de concentrer sa quasi-valeur $\frac{1}{3}$A immédiatement par la formule

$$p > \frac{C}{B - \Pi\,\varpi},$$

sans chercher à savoir si l'on a $\mathcal{S}C > 0$ ou $\mathcal{S}C < 0$, la concentration me donne

$$\psi = (\tfrac{1}{3}A = 2,83.$$
$$k\psi = \ldots\ldots = 1,167.$$
$$k'\psi = \ldots\ldots = 0,633.$$

Je m'arrête à ce terme, et je vois, comme cela doit être, que la petite racine est la réelle, et qu'elle peut se concentrer. Au lieu de continuer la concentration, je prends $z = -0,6$,

que je substitue dans $x = -(3,5 + z)$, et j'ai $x = -2,9$.

Je forme la nouvelle équation

$$x = -(2,9 + z),$$

et j'ai $z^3 + 6,7z^2 + 15,63y - 1,631 = 0$;

je concentre immédiatement $\frac{1}{3}A$, et j'ai

$$\begin{aligned} \psi &= 2,2333. \\ k\ \psi &= -0,2067. \\ k'\ \psi &= -0,09556. \\ k''\ \psi &= -0,10019. \\ k'''\psi &= -0,99992. \end{aligned}$$

D'où je vois que c'est encore la petite racine qui est la réelle, et comme elle est négative en p, ou positive en z, elle se concentre alternativement. Comme la vraie valeur qui convient à z est $z = 0,1$, on voit combien elle converge rapidement.

171. Je me suis beaucoup étendu, dans ce chapitre, sur la résolution des équations du troisième degré, parce qu'il a fallu en développer la nature et la théorie du calcul des inéquations. Mais ce qui appartient purement à la résolution pratique des équations de ce degré, se réduit à bien peu de choses.

Quelle que soit l'équation proposée, si $\sqrt{r}$ est réel, prenez immédiatement les trois quasi-valeurs de ses racines par la formule de décomposition (163).

Ensuite, pour les concentrer rapidement, si elles sont toutes les trois réelles, prenez une des quasi-valeurs extrêmes, que j'appelle généralement q, faites

$$x = -(q + z),$$

vous aurez une équation en z, dont vous pourrez prendre les limites par la même formule; mais, plus simplement, concentrez immédiatement la quasi-valeur de la première racine par la formule

$$p_1 > \frac{C}{B - \pi\varpi}.$$

Cette première racine sera alors très-petite relativement aux deux autres, elle se concentrera donc très-rapidement. Si la concentration est encore trop lente, vous lui donnerez une nouvelle convergence en faisant, avec la quasi-valeur déjà concentrée, $= q'$, l'équation

$$x = -(q' + z).$$

La nouvelle substitution de cette valeur dans la proposée, vous donnera une nouvelle équation en z, dont la première racine, alors très-petite, se concentrera enfin rapidement.

Si le radical originel est imaginaire, on prendra la quasi-valeur réelle sur la formule (170) qui convient à $\sqrt{-r}$, et pour la concentrer, on opérera de même.

En général, ce n'est que sur des équations

de complément qu'il faut opérer la concentration, et jamais sur l'équation proposée, parce que, 1°. sa marche est ordinairement très-lente ; 2°. parce qu'elle ne peut réussir qu'autant que toutes les racines ont le même signe. Dans les équations de complément la concentration est d'autant plus rapide que le complément de la première racine est petit, les racines y sont toutes du même signe, il n'y a jamais que la petite quasi-valeur qui peut avoir un signe différent, la concentration n'en est pas moins convergente, elle est alors alternative.

CHAPITRE IV.

De la résolution des équations du quatrième degré.

PREMIÈRE SECTION.

PREMIER MODE DE SOLUTION.

De la résolution des valeurs de p, ou première méthode de solution simple.

172. Pour résoudre l'équation générale du quatrième degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

je la décompose comme pour le troisième degré en deux facteurs,

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x + p) = 0 ;$$

en effectuant l'on a

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx \\ \quad + px^3 + Ppx^2 + Qpx + Rp \end{array}\right\} = 0 ;$$

d'où j'ai les quatre équations auxiliaires,

$$\begin{array}{ll} P + p = A \ldots\ldots & 1. \\ Q + Pp = B \ldots\ldots & 2. \\ R + Qp = C \ldots\ldots & 3. \\ Rp \ldots\ldots = D \ldots\ldots & 4. \end{array}$$

Ensuite je prends l'inéquation conditionnelle de l'équation du troisième degré qui est ici

$$P^2 - 3Q > 0,$$

ou

$$Q < \tfrac{1}{3} P^2 ;$$

j'ai donc

$$\left.\begin{array}{l} Q = B - Pp \\ Q < \frac{1}{3} P^2 \end{array}\right\} \text{d'où } \tfrac{1}{3} P^2 > B - Pp ;$$

en substituant la valeur de P de la première équation auxiliaire, on a une inéquation du deuxième degré,

$$p^2 - \frac{Ap}{2} - \left(\frac{A^2 - 3B}{2}\right) < 0,$$

qui donne deux quasi-valeurs qui appartien-

nent par la même raison que ci-dessus (51) aux deux racines extrêmes de l'équation, et

173. $p_4 < \frac{1}{4}(A + 3\sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B}) = < \varphi$,
$p_1 > \frac{1}{4}(A - 3\sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B}) = > \varpi$;

puis avec l'équation auxiliaire $p = A - P$, on a

$$A - P < \varphi,$$
$$A - P > \varpi;$$

d'où

$$P > \tfrac{3}{4}(A - \sqrt{A^2 - \tfrac{8}{3}B}) = > \Phi,$$
$$P < \tfrac{3}{4}(A + \sqrt{A^2 - \tfrac{8}{3}B}) = < \Pi.$$

La première de ces deux quasi-valeurs Φ appartient à la somme des trois plus petites racines, et l'autre Π à celle des trois plus grandes. On voit qu'on a obtenu d'abord ces quatre quasi-valeurs originelles de la même manière, et d'après les mêmes principes que dans le troisième degré ; il en est de même de tous les autres degrés.

174. Il semblerait qu'en introduisant l'inéquation conditionnelle du troisième degré de l'équation

$$x^3 + Px^2 + Qx + Q = 0,$$

j'aurais dû prendre l'inéquation générale qui renferme les rapports de tous les coëfficiens et qui est

$$4P^3R - P^2Q^2 - 18PQR + 4Q^3 + 27R^2 < 0 \ (71).$$

Si l'on employait cette inéquation, on retomberait dans l'inconvénient de la méthode des équations qu'on a employées jusqu'alors pour les résoudre, il en résulterait une surcomposition au lieu d'une décomposition, et l'on entrerait dans un labyrinthe de calcul algébrique, dont il ne serait pas possible de sortir.

L'inéquation $Q < \frac{1}{3}P^2$ est le pivot de la résolution des équations du quatrième degré, elle sert à trouver toutes les inéquations qui naissent de la relation des divers coëfficiens entr'eux. On sait que tous les coëfficiens d'une équation se dérivent de ceux qui les précèdent.

Il est aisé, d'après cela, de voir comment avec l'inéquation conditionnelle des deux premiers coëfficiens, on peut arriver aux inéquations qui expriment la relation de tous les autres.

175. Je continue et j'observe que ce qui a été dit relativement aux quasi-valeurs négatives et positives en p, dans la résolution du troisième degré, s'applique parfaitement ici. Ainsi je suppose d'abord que tous les coëfficiens de la proposée sont positifs, que par conséquent les quasi-valeurs originelles sont positives en p, et négatives en x. Si toutes les

racines devenaient positives en x, et négatives en p, alors le coëfficient A serait négatif, et en faisant ressortir son signe, la quasi-valeur

$$p_1 > \varpi \ldots\ldots\ldots \text{ devient } p_1 = -< \varphi,$$
$$p_4 < \varphi \ldots\ldots\ldots \text{ devient } p_4 = -> \varpi,$$

comme ci-dessus (55).

Si l'équation contient des racines en partie négatives et en partie positives, l'inéquation

$$p_4 > \varpi,$$

étant pronégative, appartiendra à la plus grande racine négative en p, et la quasi-valeur ϖ sera plus grande en nombre que cette grande racine ; par exemple :

Soit l'équation

$$x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x-4)(x-3)(x-1)(x+1) = 0;$$

je les place ici dans leur ordre de résolution, et j'ai

$$p_1 > \varpi = > -5{,}076 = - < 5{,}076,$$
$$p_4 < \varphi = < \quad 1{,}576.$$

Tout ceci est conforme à ce qu'on a déjà vu.

176. Il s'agit de completter les quasi-valeurs ϖ et φ ; je prends l'inéquation

$$Q = B - Pp,$$

je la compare avec

$$Q \parallel B - \Pi\varpi,$$

en faisant $\sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B} = \sqrt{r}$.

$$Q \parallel \tfrac{1}{16}(16B - 3A^2 + 9r - 6A\sqrt{r}.$$
$$Q \parallel \tfrac{3}{16}(A^2 - 2(A^2 - \tfrac{8}{3}B) + 3r + 2A\sqrt{r}.$$
$$Q \parallel \tfrac{3}{16}(A^2 + r + 2A\sqrt{r}.$$
$$Q \parallel \tfrac{3}{16}(A + \sqrt{r})^2.$$

de $\Pi = \frac{4}{3}(A + \sqrt{r}..Q \parallel \frac{1}{3}\Pi^2$.

Puis $\quad Q < \frac{1}{3}P^2,$

donc $\quad \frac{1}{3}\Pi^2 > \frac{1}{3}P^2,$

donc $\quad Q < \frac{1}{3}\Pi^2;$

$$\tfrac{1}{4}\Pi^2 = B - \Pi\varpi, \text{ et } Q < B - \Pi\varpi.$$

En faisant la même opération avec

$$Q \parallel B - \Phi\varphi,$$

on arriverait de même à

$$Q \parallel \tfrac{1}{3}\Phi^2,$$

donc on a d'abord

$$\tfrac{1}{4}\Phi^2 = B - \Phi\varphi;$$

mais l'on a

$$Q < \tfrac{1}{3}P^2,$$
$$\tfrac{1}{3}\Phi < \tfrac{1}{3}P^2;$$

on ne peut rien conclure de ces deux inéquations qui sont dans le même sens; on a donc

seulement l'inéquation de direction incertaine

$$Q \parallel \tfrac{1}{3}\phi^2,$$

comme dans le troisième degré.

177. Par le simple raisonnement on a prouvé ci-dessus (61), que pour la petite racine on devait avoir

$$Q < B - \Pi\varpi.$$

J'appelle K cette quasi-valeur de Q qui correspond à la somme du produit des trois plus grandes racines multipliées deux à deux, comme Π correspond à la somme des trois plus grandes racines. Si on substitue K et ϖ dans l'équation auxiliaire,

$$R = C - Qp;$$

on aura, par le même raisonnement,

$$R < C - K\varpi;$$

parce que K est plus grand que sa valeur Q correspondante, et ϖ plus petit; et parce que K est toujours plus grand que ϖ, et ne cesserait pas de l'être, si ces deux quasi-valeurs parvenaient à leur valeur correspondante Q et p_i.

178. Voici comment on peut encore démontrer la direction de cette quasi-valeur de R. J'appelle z' la quantité dont K surpasse sa valeur Q correspondante, et z la quantité qui

manque à ϖ pour valoir p_1 ; au lieu de

$$R = C - Qp,$$

j'aurai

$$R = C - (K - z')(\varpi + z),$$

avec la valeur de K,

$$R = C - (B - \Pi\varpi)\varpi - [(B - \Pi\varpi)z - (\varpi + z)z'].$$

Le deuxième membre de cette équation renferme deux parties, la première,

$$C - (B - \Pi\varpi)\varpi$$

est la quasi-valeur de R, et l'autre partie est ce qui la complète ; si cette quantité

$$[(B - \Pi\varpi)z - (\varpi + z)z'],$$

qui est précédée du signe — est toujours positive de sa nature ; il faudra conclure delà que l'on doit avoir

$$R < C - (C - \Pi\varpi)\varpi;$$

puisqu'il faudra toujours en retrancher une quantité positive, pour avoir la vraie valeur de R ; c'est donc ce qu'il s'agit de faire voir.

On a d'abord l'inéquation incertaine,

$$(B - \Pi\varpi)z - (\varpi + z)z' \parallel 0;$$

je substitue au lieu de z' sa valeur en fonctions de z, que j'obtiens de cette manière :

$$B - \Pi\varpi - z' = (Q) = B - (\Pi - z)(\varpi + z),$$

d'où j'ai

$$z' = (\Pi - \varpi - z)z;$$

j'ai donc, en reprenant l'inéquation incertaine,

$$B - \Pi\varpi - (\Pi - \varpi - z)(\varpi + z) \parallel o;$$

en substituant les valeurs de Π et de ϖ en coëfficiens de la proposée, j'ai, tout calcul fait,

$$z^2 - \tfrac{1}{4}(A + 9\sqrt{r})z + \tfrac{1}{8}(11\,A^2 - 28B + 3A\sqrt{r} \parallel o,$$

puis

$$(z - \tfrac{1}{8}(A + 9\sqrt{r}))^2 \left\{ \begin{array}{l} \parallel -\tfrac{1}{64}(6A^2) - 8B + 6A\sqrt{r}, \\ \parallel -\tfrac{2}{64}(A + \sqrt{r})^2, \end{array} \right.$$

d'où

$$(z - \tfrac{1}{8}(A + 9\sqrt{r}))^2 + \tfrac{3}{64}(A + \sqrt{r})^2 \parallel o;$$

mais le premier membre de cette inéquation, composée de deux quarrés, est nécessairement positif toutes les fois que $\sqrt{r}$ est réel, donc on a

$$(z - \tfrac{1}{8}(A + 9\sqrt{r}))^2 + \tfrac{3}{64}(A + \sqrt{r})^2 > o;$$

donc, en remontant, l'on a

$$(B - \Pi\varpi)z - (\varpi + z)z' > o;$$

donc, dans la valeur de R, la quantité que l'on retranche de la quasi-valeur est toujours positive, donc on a

$$R < C - (B - \Pi\varpi)\varpi.$$

Delà avec l'équation auxiliaire 4, $Rp = D$, on obtient, pour la quasi-valeur complète de la première racine,

179. $$\left.\begin{array}{l} p_1 > \dfrac{D}{C-(B-\Pi\varpi)\varpi} \\ \text{ou} \quad p_1 > \dfrac{D}{C-B\varpi+A\varpi^2-\varpi^3} \end{array}\right\} = > k\varpi,$$

et pour Φ,

$$p_4 \parallel \frac{D}{C-B\varphi+A\varphi^2-\varphi^3} \parallel k\varphi.$$

Pour obtenir delà la série de concentration, il faut déterminer le rapport d'inéquation de ϖ à $k\varpi$, j'ai

$$\varpi \parallel \frac{D}{C-B\varpi+A\varpi^2-\varpi^3} \parallel k\varpi,$$

$$C\pi - B\pi^2 + A\pi^3 - \pi^4 \parallel D,$$

$$o \parallel \pi^4 - A\pi^3 + B\pi^2 - C\pi + D;$$

mais le deuxième membre n'est autre chose que l'équation proposée, dans laquelle on aurait substitué la quasi-valeur $-\pi$ à la place de x, ses facteurs sont donc

$$o \parallel (\pi-a)(\pi-b)(\pi-c)(\pi-d).$$

Comme ils sont tous négatifs, leur produit est positif, donc

$$o < \pi^4 - A\pi^3 + B\pi^2 - C\pi + D;$$

donc

$$\varpi < k\varpi;$$

donc on a ces rapports d'inéquation

$$\begin{array}{ccc} \pi & < & k\pi; \\ \wedge & & \wedge \\ p_1 & & p_1 \end{array}$$

de $p_1 > k\pi$, on a

$$k\pi^4 - Ak\pi^3 + Bk\pi^2 - Ck\pi + D > 0,$$

d'où

$$k\pi > \frac{-D}{k\pi^3 - Ak\pi^2 + Bk\pi - C},$$

$$k\pi < \frac{D}{C - Bk\pi + Ak\pi^2 - k\pi^3} = < k'\pi.$$

Delà on conclura, comme ci-dessus (87), la série de concentration,

179. $$\left.\begin{array}{ccccccccc} \pi & < & k\pi & < & k'\pi & < & k''\pi & < & k'''\pi, \text{ etc.} \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ p_1 & & p_1 & & p_1 & & p_1 & & p_1 \end{array}\right\} = p_1.$$

Et si π acquérait une valeur qui dépassât la première racine seulement, en l'appelant π', on aurait la série opposée,

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \pi' & > & k\pi' & > & k'\pi' & > & k''\pi' & > & k'''\pi', \text{ etc.} \\ \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\ p_1 & & p_1 & & p_1 & & p_1 & & p_1 \end{array}\right\} = p.$$

Je suppose ici toutes les racines négatives, si elles étaient toutes positives, ce serait la dernière quasi-valeur φ qui serait susceptible de se concentrer; mais comme $p_4 < \varphi$ devient $p = - > \varpi$ en faisant ressortir son signe négatif, on a encore la même série que celle-ci, à l'exception que les termes étant métanégatifs, elle est précédée du signe — qui affecte leur quantité, et non pas leur direction.

On aura encore une série convergente qui

sera alternative, si la quasi-valeur ϖ est la plus petite en nombre, quoiqu'elle corresponde à une racine d'un signe différent de toutes les autres, par le même raisonnement que ci-dessus.

Il n'est pas inutile pour la théorie de déterminer la direction de la grande quasi-valeur complète ou de $k\varphi$; on aura comme ci-dessus deux cas.

1°. Si $\Phi > \varphi$, on a

$$Q > B - \Phi\varphi,$$
$$R > C - (B - \Phi\varphi)\varphi;$$

d'où

$$p_4 < \frac{D}{C - (B - \Phi\varphi)\varphi}.$$

2°. Si $\Phi < \varphi$, on a

$$Q < B - \Phi\varphi,$$
$$R < C - (B - \Phi)\varphi;$$

d'où

$$p_4 > \frac{D}{C - (B - \Phi\varphi)\varphi}.$$

Pour le premier cas on a donc

$$p_4 < \varphi,\ p_4 < k\varphi;$$

mais en déterminant le rapport d'inéquation de φ à $k\varphi$, on a

$$\varphi^4 - A\varphi^3 + B\varphi^2 - C\varphi + D > 0;$$

car les quatre facteurs

$$(\varphi-a)(\varphi-b)(\varphi-c)(\varphi-d)$$

sont tous positifs ; d'où

$$\varphi > \frac{-D}{\varphi^3 - A\varphi^2 + B\varphi - C},$$

$$\varphi < \frac{D}{C - B\varphi + A\varphi^2 - \varphi^3} = < k\varphi.$$

Il suit de là que la latitude de $p_4 < k\varphi$ est plus grande que celle de $p_4 < \varphi$, on aurait les rapports

$$\begin{matrix} \varphi < k\varphi \\ \vee \quad \vee \\ p_4 \quad p_4 \end{matrix}$$

qui détermineraient une série de concentration divergente. Ceci confirme ce qu'on a dit ci-dessus (93), que les séries de concentration des racines paires étaient divergentes, et celles des racines impaires convergentes : cette loi est importante.

Quant au deuxième cas, les deux inéquations opposées $p_4 < \varphi$ et $p_4 > k\varphi$, annoncent que $k\varphi$ a franchi la valeur, et on peut la concentrer par la concentration de compensation.

180. On peut remarquer que la formule de concentration pour le quatrième degré, est généralement la formule de la quasi-valeur

complète

$$p_1 > \frac{D}{C - (B\Pi\varpi)\varpi};$$

en substituant successivement à la place de Π et de ϖ, les quasi-valeurs

$$k\Pi,\ k\varpi,\ k'\Pi,\ k'\varpi,\ \text{etc.}$$

181. Quant aux racines imaginaires qui peuvent se trouver dans l'équation, je ne chercherai pas à déterminer ici les inéquations conditionnelles qui apprendraient à les reconnaître ; les formules ultérieures de solution qu'on obtiendra en donnant les quasi-valeurs des racines avec la forme qui leur convient, feront connaître le nombre des racines imaginaires que contient l'équation, et le rang qu'elles y tiennent relativement à leur partie réelle. J'observerai seulement que quand ϖ et φ sont réels, toutes les fois qu'on peut obtenir avec ϖ une série de concentration, on peut conclure qu'elle correspond à une racine réelle. Quand le radical originel est imaginaire, on n'a d'autre limite que la quantité $\frac{1}{4}$ A; mais si l'équation contient deux racines réelles, on obtiendra avec cette simple quasi-valeur une série de concentration qui aboutira ou à la première ou à la troisième racine, selon que l'on aura $p < \frac{1}{3}A$ ou $p > \frac{1}{3}A$.

182. Avant de passer à la section suivante, il est nécessaire d'exposer la loi qui suit la série de concentration, quand il se trouve des racines égales dans l'équation. Loi de concentration pour les racines égales.

Si l'on suppose d'abord que les deux premieres racines sont égales, et qu'elles soient toutes réelles, on aura pour la première, et par conséquent pour les deux premières, la série de concentration (87)

$$\underset{p_1}{\varpi} < \underset{p_1}{k\varpi} < \underset{p_1}{k'\varpi}, \text{ etc.}$$

mais si l'on donne à ϖ ou $k\varpi$, une valeur qui lui fasse dépasser la première racine, elle dépassera en même temps la deuxième, la série de concentration divergera de la deuxième parce qu'elle l'aura franchie, et convergera vers la troisième. Ainsi, dans ce cas, on ne peut pas avoir deux séries de concentration opposées, on ne peut avoir que la première.

Mais quand l'équation contient trois racines égales, si l'on donne à ϖ une valeur qui dépasse la première racine, elle dépassera la troisième, alors la série deviendra convergente en sens contraire. De là suit cette loi : *On a deux séries opposées de concentration quand le nombre des racines égales est impair, et l'on ne peut en avoir qu'une quand le nombre des racines égales est pair.*

Il s'agit de confirmer cette loi par des exemples. Je prends d'abord l'équation

$$x^4 + 13x^3 + 33x^2 + 51x + 10 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x + 10)(x + 1)^3,$$

et qui a par conséquent trois racines égales. On a

$$\Pi = 16,5.$$
$$\pi = -3,5.$$
$$\Phi = 3.$$
$$\phi = 10.$$

On peut remarquer d'abord que ϕ contient la somme exacte des trois petites racines qui sont égales, et Φ la valeur exacte de la quatrième. Ce résultat confirme ce que l'on a vu ci-dessus (85), savoir : que quand une équation a toutes ses racines égales moins une, la quasi-valeur originelle de la seule racine inégale exprime exactement sa valeur.

Maintenant si je concentre π, qui, comme l'on voit, est extradivergent, j'aurai

$$\pi = -3,5.$$
$$k\pi = 0,02.$$
$$k'\pi = 0,3.$$
$$k''\pi = 0,4.$$

La série de concentration, comme on voit, est très-lente ; mais on connoît les moyens de

la rendre rapide. Je fais

$$\varpi = 0{,}9,$$

et j'ai, en faisant un pas de concentration,

$$k\,\varpi = 0{,}9008\,;$$

je fais ensuite franchir à ϖ la valeur de la racine en faisant

$$\varpi = 1{,}1\,;$$

j'ai

$$k\,\varpi = 1{,}098\,:$$

on voit que ces deux valeurs de $k\,\varpi$ avancent, en sens contraire, vers la valeur 1 de la racine.

Soit maintenant l'équation

$$x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x+1)^2\,(x+2)\,(x+3).$$

On a d'abord

$$\Pi = 6{,}6857.$$
$$\varpi = 0{,}3143.$$
$$\Phi = 3{,}8143.$$
$$\varphi = 3{,}1857.$$
$$k\varpi = 0{,}49.$$

La série de concentration a une marche lente, à cause de l'égalité des deux premières racines. Je fais

$$\varpi = 0{,}9,$$

j'ai

$$k\,\varpi = 0{,}903\,;$$

je fais ensuite

$$\varpi = 1,1,$$

et j'ai

$$k\varpi = 1,103.$$

On voit que dans ce cas cette dernière valeur de $k\varpi$ ne retourne pas vers la valeur de la racine $= 1$, mais continue sa marche croissante vers la troisième racine.

Pour savoir si une équation a des racines égales, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la méthode connue, on le voit immédiatement par la concentration des limites que l'on obtient en valeurs de p et en valeurs de x. Il faut remarquer qu'à proportion que les termes de la concentration s'éloignent de la racine, leur pas ou leur différence est plus grande; ils ont un maximum d'accroissement, après lequel ils décroissent en s'approchant de la troisième racine.

Pour se procurer une double série de concentration dans ce cas, il suffit de se procurer une équation en P, comme on a fait ci-dessus pour le troisième degré; elle sera toujours du même degré que la proposée; et dans ce cas-ci, comme chaque valeur de P contient la somme de trois racines, elles seront toutes inégales, à moins que la proposée ne contienne deux

paires de racines égales. Au reste, il est assez inutile d'avoir recours à ce moyen.

La même loi a lieu pour les équations qui contiennent des racines imaginaires. Je prends pour premier exemple d'abord, une équation dont les racines sont inégales, savoir :

$$x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 42x + 20 = 0;$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + 6x + 10)(x + 1)(x + 2) = 0;$$

on a

$$\left.\begin{matrix} \pi = 1,5 \\ k\pi = 1,44 \\ \varphi = 3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Je fais } \pi = 0,9 \\ \text{J'ai } k\pi = 0,927 \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \pi = 1,1. \\ k\pi = 1,077. \end{matrix}\right.$$

On voit que les deux quasi-valeurs de $k\pi$ convergent en deux sens opposés vers la racine 1, comme quand toutes les racines sont réelles; mais je prends maintenant l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 26x + 10 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + 6 + 10)(x + 1)^2,$$

on a

$$\left.\begin{matrix} \pi = 0,767 \\ k\pi = 0,79 \\ \varphi = 3,225 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Je fais } \pi = 0,9 \\ \text{J'ai } k\pi = 0,905 \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \pi = 1,1. \\ k\pi = 1,105. \end{matrix}\right.$$

On voit dans cet exemple, qui contient deux racines égales et deux imaginaires, que les

termes $k\varpi$ qui n'ont pas franchi la valeur de la racine convergent vers elle, mais les termes qui l'ont franchie s'en éloignent encore par la continuation de la concentration. Dans ces deux exemples, le radical originel est réel; mais le même résultat aurait lieu s'il était imaginaire, en prenant pour quasi-valeur originelle $\psi = \frac{1}{3} A$.

On peut observer maintenant que dans le premier de ces deux derniers exemples, la quasi-valeur

$$\varpi = 1,5,$$
$$k\varpi = 1,44,$$

qui correspond à une racine réelle, a sa direction

$$p_1 < \varpi, \; p_1 < k\varpi,$$

conforme à celle de la même quasi-valeur dans les équations du troisième degré qui ont deux racines imaginaires, quand elle correspond à la racine réelle; mais dans le deuxième exemple, la même quasi-valeur

$$\varpi = 0,767$$
$$k\varpi = 0,79$$

annonce une direction

$$p_1 > \varpi, \; p_1 > k\varpi,$$

qui est la même que celle qui a lieu quand les racines de l'équation sont toutes réelles; en

voici la raison : Dans la résolution des équations du troisième degré, l'équation indéterminée

$$x^2 + Px + Q = 0$$

ne contient que la seule inéquation

$$Q < \tfrac{1}{4} P^2;$$

et quand ses deux racines sont imaginaires, il faut absolument que l'on ait

$$Q > \tfrac{1}{4} P^2.$$

Mais dans ce cas-ci, lorsque l'équation indéterminée contient deux racines imaginaires, on n'a pas toujours pour cela

$$Q > \tfrac{1}{3} P^2;$$

on peut avoir

$$Q < \tfrac{1}{3} P^2 :$$

c'est le cas où le radical originel

$$\sqrt{A^2 - 3B}$$

est réel, alors on a

$$p > \pi, \ p < \varphi$$

comme dans les équations où toutes les racines sont réelles, parce que c'est de cette inéquation que les quasi-valeurs originelles prennent leur direction ; dans ce cas, les deux racines imaginaires de l'équation indéterminée ne proviennent pas de la relation des deux premiers coëfficiens P et Q, mais du troisième coëfficient R.

Au reste, je ne m'occuperai plus à déterminer les différentes relations qui font varier la direction des quasi-valeurs; elles se multiplient à proportion que les équations sont à un degré plus élevé : il en résulte une complication qu'il est inutile de débrouiller. On voit que la résolution des équations ne dépend pas de la connaissance de la direction des quasi-valeurs, le résultat de la concentration l'apprend toujours. Le signe *inégal* ⫲ suffit pour les différentes opérations du calcul des inéquations, dont le but est de séparer les quasi-valeurs des racines. La détermination des signes $<$ ou $>$ n'appartient qu'à la théorie : on peut parvenir à son but sans en déterminer aucun.

De la résolution des valeurs de x, ou deuxième méthode de solution simple.

183. Il s'agit maintenant de résoudre l'équation indéterminée

$$x^3 + P x^2 + Q x + R = 0.$$

Il faut commencer par observer que dans la résolution en p, j'ai commencé par déterminer la quasi-valeur de P par la relation des deux premiers coëfficiens A et B; j'ai ensuite déterminé Q, puis R; enfin j'ai complété la quasi-

valeur de p par leur détermination, j'ai successivement employé les quatre équations auxiliaires, selon leur ordre, 1, 2, 3, 4. Je prends maintenant une direction opposée, et j'opère sur l'équation indéterminée, en partant de droite à gauche. Ces deux marches opposées ont été suivies dans le troisième degré, et elles le seront dans tous les autres.

J'ai d'abord

$$p = \frac{D}{R},$$

$$p_4 < \varphi;$$

d'où $$R > \frac{D}{\varphi}.$$

Pour avoir la quasi-valeur de Q, je prends d'abord

$$R = \frac{D}{p},$$

$$R = C - pQ;$$

d'où $$p^2 - \frac{C}{Q}p = -\frac{D}{q};$$

j'obtiens l'équation

$$p = \frac{C}{2Q} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4Q^2} - \frac{D}{Q}};$$

puis avec l'inéquation $p_4 < \varphi$, j'ai

$$\varphi - \frac{C}{2Q} > \pm \sqrt{\frac{C^2}{4Q^2} - \frac{D}{Q}}.$$

Je ne mets pas ici le double signe d'inéquation avec le double signe additionnel $\pm$, parce que je réforme de nouveau le quarré pour faire disparaître le radical ; il me reste

$$\varphi^2 - \frac{C\varphi}{Q} < -\frac{D}{Q};$$

d'où je tire enfin

$$Q > \frac{C\varphi - D}{\varphi^2}.$$

En exprimant Q et R en fonctions de ϖ, on aura par les mêmes opérations

$$Q < \frac{C\pi - D}{\pi^2},\quad R < \frac{C}{\pi};$$

J'ai donc, en fonctions de φ,		En fonctions de π,	
$P > \Phi$	$= > A'$.	$P < \Pi$	$= < A_{\prime}$.
$Q > \frac{C\varphi - D}{\varphi^2}$	$= > B'$	$Q < \frac{C\pi - D}{\pi^2}$	$= < B_{\prime}$.
$R > \frac{D}{\varphi}$	$= > C'$	$R < \frac{D}{\pi}$	$= < C_{\prime}$.

J'ai ensuite

$$P > A',$$

puis, avec l'équation indéterminée,

$$P = -\frac{x^3 - Q - R}{x^4},$$

j'obtiens

$$A'x^2 < -x^3 - Qx - R,$$

puis

$$Q < -\frac{A'x^2 - x^3 - R}{x},$$

et avec l'inéquation

$$Q > B',$$

j'ai

$$B'x < -x^3 - A'x^2 - R,$$

puis

$$R < -x^3 - Ax^2 - Bx,$$

et avec l'inéquation

$$R > C',$$

j'obtiens enfin l'inéquation du troisième degré en Φ,

184. $$x^3 + A'x^2 + B'x + C' < 0.$$

En opérant de même avec les quasi-valeurs en Π, j'aurai

$$x^3 + A_{\prime}x^2 + B_{\prime}x + C_{\prime} > 0.$$

J'observerai d'abord que la première de ces deux inéquations, qui est en Φ, est l'inéquation aux trois quasi-valeurs des trois plus petites racines de la proposée; chaque coëfficient est plus petit que seraient ceux de l'équation à ces trois petites racines exactes. Par la même raison, la deuxième inéquation appartient aux trois plus grandes racines de la proposée, les coëfficiens surpassent en valeur ceux

qu'aurait l'équation aux trois plus grandes racines exactes.

Je traite ces deux inéquations comme deux équations, et je les résous comme ci-dessus, mais alors j'emploie le signe ||.

185. La première en Φ donne les deux inéquations

$$x^2 + \Phi' x + \frac{C'}{\varphi} \parallel 0,$$

$$x^2 + \Pi' x + \frac{C'}{\pi} \parallel 0;$$

la deuxième en Π donne

$$x^2 + \Phi_{,} x + \frac{C_{,}}{\varphi_{,}} \parallel 0,$$

$$x^2 + \Pi_{,} x + \frac{C_{,}}{\pi_{,}} \parallel 0.$$

La première de ces quatre inéquations correspond aux deux plus petites racines, comme on l'a déjà vu, de l'inéquation

$$x^3 + A' x^2, \text{ etc.}$$

et par conséquent aux deux plus petites racines de la proposée. Je résous ces quatre inéquations, en donnant à leurs quasi-valeurs le rang qui leur convient dans le tableau suivant, qui présente l'ensemble des opérations qu'on a déjà faites.

186.

$$x^4 + Ax^3 + \text{etc.} \begin{cases} x^2 + A'x \begin{cases} x^2 + \Phi' x + \frac{C'}{\varphi'} \begin{cases} x_1 - \parallel \frac{1}{2}\Phi' - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi'^2 - \frac{C'}{\varphi'}} \\ x_2 - \parallel \frac{1}{2}\Phi' + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi'^2 - \frac{C'}{\varphi'}} \end{cases} \\ x^2 + \Pi' x + \frac{C'}{\varpi'} \begin{cases} x_2 - \parallel \frac{1}{2}\Pi' - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi'^2 - \frac{C'}{\varpi'}} \\ x_3 - \parallel \frac{1}{2}\Pi' + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi'^2 - \frac{C'}{\varpi'}} \end{cases} \end{cases} \\ x^2 + A_{,}x \begin{cases} x^2 + \Phi_{,} x + \frac{C_{,}}{\varphi_{,}} \begin{cases} x_2 - \parallel \frac{1}{2}\Phi_{,} - \sqrt{\frac{1}{4}\Phi_{,}^2 - \frac{C_{,}}{\varphi_{,}}} \\ x_3 - \parallel \frac{1}{2}\Phi_{,} + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi_{,}^2 - \frac{C_{,}}{\varphi_{,}}} \end{cases} \\ x^2 + \Pi_{,} x + \frac{C_{,}}{\varpi_{,}} \begin{cases} x_3 - \parallel \frac{1}{2}\Pi_{,} - \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_{,}^2 - \frac{C_{,}}{\varpi_{,}}} \\ x_4 - \parallel \frac{1}{2}\Pi_{,} + \sqrt{\frac{1}{4}\Pi_{,}^2 - \frac{C_{,}}{\varpi_{,}}} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On voit dans ce tableau que l'équation proposée est un tronc qui se ramifie d'abord en deux branches, la supérieure en Φ, l'inférieure en Π. Cette dernière forme la branche des quasi-valeurs irréductibles, comme dans le troisième degré. En effet, en reprenant les deux inéquations en Φ et en Π du troisième degré, qui ont, comme ces dernières, la direction

$$x^2 + \Phi x + \frac{C}{\varphi} < 0,$$

$$x^2 + \Pi x + \frac{C}{\pi} > 0,$$

les coëfficiens de la première étant inférieurs aux vraies valeurs auxquelles ils correspondent, sont contenus dans l'équation, et leur limite vers l'accroissement est d'être égaux aux valeurs exactes, ce qui a lieu dans les équations du troisième degré, lorsqu'il y a deux racines égales, et que Φ correspond à leur somme. D'un autre côté, l'inéquation

$$x^2 + \Pi x + \frac{C}{\pi},$$

a ses quasi-valeurs imaginaires, tant que ses coëfficiens sont trop grands, et sont par conséquent hors de l'équation. La limite de cette qualité d'être imaginaires, est lorsque ces quasi-valeurs expriment exactement les deux racines, comme cela a encore lieu lorsque Π exprime la somme de deux racines égales. C'est donc parce que les coëfficiens de l'inéquation en Π sont hors de l'équation, qu'elles sont imaginaires et irréductibles.

La même chose a lieu pour le quatrième degré; les deux inéquations en Φ et en Π du troisième degré, ont le même rapport entre elles que ces deux-ci, les coëfficiens de la première, plus petits que les valeurs vraies, sont contenus dans l'équation, et les coëfficiens de la deuxième étant trop grands, sont en-dehors

de toutes ses valeurs; par conséquent la branche inférieure du tableau qui appartient à l'inéquation en π est une branche irréductible.

Quant à la branche réductible, on a vu que la petite quasi-valeur $x_{,}$ était la plus rapprochée de sa racine; il en est de même ici, et par la même raison. Ainsi je ne m'occuperai que de la première racine, ou plutôt des deux limites extrêmes, comme j'ai fait dans le troisième degré.

En les exprimant en fonctions des coëfficiens A' B' C' des deux inéquations du degré inférieur, j'aurai

187. $$x_{,} -\| \tfrac{1}{3}\left(A' - \sqrt{A'^2 - 3B'} - \sqrt{\frac{-2A'^3 + 9A'B' - 27C' + 2\sqrt{(A'^2 - 3B')^3}}{A' + 2\sqrt{A'^2 - 3B'}}}\right),$$

. . . .

$$x_{4} -\| \tfrac{1}{3}\left(A_{,} + \sqrt{A_{,}^2 - 3B_{,}} + \sqrt{\frac{-2A_{,}^3 + 9A_{,}B_{,} - 27C_{,} - 2\sqrt{(A_{,}^2 - 3B_{,})^3}}{A_{,} - 2\sqrt{A_{,}^2 - 3B_{,}}}}\right).$$

Je ne ramenerai cette formule en valeurs des coëfficiens de la proposée, que dans le deuxième mode de solution, où les expressions sont plus simples. En exprimant seulement le premier terme A' et $A_{,}$, en coëfficiens de la proposée, j'ai

$$\tfrac{1}{3}A' = \tfrac{1}{4}(A - \sqrt{r}),\ \tfrac{1}{3}A_{,} = \tfrac{1}{4}(A + \sqrt{r}).$$

On voit que l'expression des quasi-valeurs est composée, 1°. de la partie rationnelle $\frac{1}{4}A$;

et on peut remarquer que pour le deuxième degré la partie rationnelle $= \frac{1}{2}$ A, et pour le troisième $= \frac{1}{3}$ A ; pour le degré suivant elle sera $= \frac{1}{4}$ A, et ainsi de suite; 2°. d'un premier radical simple $\sqrt{r}$; 3°. d'un radical composé $\sqrt{A'^2 - 3B'}$, que j'appelle *radical double*, parce qu'il contient une fonction du radical simple précédent, et que j'exprime généralement par $\sqrt{\rho'}$ pour la branche réductible, et $\sqrt{\rho_{,}}$ pour la branche irréductible; 4°. du grand radical, qui est un *radical triple*, parce qu'il contient une fonction du radical double $\sqrt{\rho}$; je l'exprime généralement par $\sqrt{R'}$ et $\sqrt{R_{,}}$, etc.

De sorte que la petite racine est contenue entre les deux limites

$$x_1 - \begin{cases} > \frac{1}{4}(A - 3\sqrt{r}, \\ \parallel \frac{1}{4}(A - \sqrt{r} - \sqrt{\rho'} - \sqrt{R'}). \end{cases}$$

On peut remarquer que la limite extrême du cas irréductible, qui a la forme

$$x_4 - \begin{cases} < \frac{1}{4}(A + 3\sqrt{r}, \\ \parallel \frac{1}{4}(A + \sqrt{r} + \sqrt{\rho_{,}} + \sqrt{R_{,}}), \end{cases}$$

a tous ses radicaux précédés du signe +, tandis que la même limite de x_1 a tous ses radicaux précédés du signe —. Si toutes les racines étaient positives, le coëfficient A serait intrinséquement négatif; en faisant ressortir son

signe, on aurait la même quasi-valeur que pour x, mais elle serait positive.

Ce sont les différens signes dont les radicaux sont susceptibles, qui ont déterminé la ramification des racines, telle qu'on la voit sur le tableau.

On peut exprimer la marche des opérations à faire par le tableau suivant, qu'on peut considérer comme une formule successive.

188.

$$\sqrt{A^2-\tfrac{8}{3}B}\ldots=\sqrt{r}\ldots\ldots$$
$$\tfrac{3}{4}(A-\sqrt{r})\ldots=\Phi\ldots=A'$$
$$\tfrac{1}{4}(A-3\sqrt{r})\ldots=\varphi\ldots=A-A'$$
$$\frac{C\varphi-D}{\varphi^2}\ldots\ldots=B'$$
$$\frac{D}{\varphi}\ldots\ldots=C'$$

$$\sqrt{A'^2-3B'}\ldots=\sqrt{\bar{r}}.$$
$$\tfrac{2}{3}(A'-\sqrt{\bar{r}})\ldots=\Phi'\ldots=A''.$$
$$\tfrac{1}{3}(A'+2\sqrt{\bar{r}})\ldots=\varphi'\ldots=A'-A''.$$
$$\frac{C'}{\varphi'}\ldots\ldots=B''.$$
$$x_1 - \| \tfrac{1}{2}\Phi' - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi'^2 - \frac{C'}{\varphi'}},$$
ou
$$x_1 - \| \tfrac{1}{2}A'' - \sqrt{\tfrac{1}{4}A''^2 - B''}.$$

Pour réunir les deux limites de la première racine, on a d'abord

$$\tfrac{3}{4}(A+\sqrt{r})=\Pi,$$
$$\tfrac{1}{4}(A-3\sqrt{r})=\pi;$$

d'où l'on a la formule

$$189.\quad x_1 - \begin{cases} > \dfrac{D}{C-(B-\Pi\pi)\pi}, \\ \| \tfrac{1}{2}\Phi' - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi'^2 - \dfrac{C'}{\varphi}}. \end{cases}$$

Avant de discuter ce qui appartient aux racines imaginaires, il est à propos d'appliquer ces formules à des exemples où toutes les racines sont imaginaires; je me bornerai à donner les quasi-valeurs des deux premières racines en Φ'.

1re	$(x+1)(x+2)(x+2)(x+3)$	$x_1 - \| \; 1,1088.$
	$x^4+8x^3+23x^2+28x+12=0$	$x_2 - \| \; 1,7646.$
2me	$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$	$x_1 - \| \; 3,1992.$
	$x^4+18x^3+119x+342x+360$	$x_2 - \| \; 4,1023.$
3me	$(x+1)(x+2)(x+10)(x+10)$	$x_1 - \| \; 0,9816.$
	$x^4+23x^3+162x^2+340x+200$	$x_2 - \| \; 2,3886.$
4me	$(x+1)(x+9)(x+10)(x+22)$	$x_1 - \| \; 1,4762.$
	$x^4+32x^3+349x^2+1398x+1080$	$x_2 - \| \; 5,4124.$
5me	$(x+1)^2(x+2)(x+3)$	$x_1 - \| \; 0,8812.$
	$x^4+7x^3+17x^2+17x+6$	$x_2 - \| \; 1,343.$

On peut remarquer dans ces exemples, que, 1°. les deux quasi-valeurs x_1 et x_2 ne suivent pas toujours les deux directions opposées $<$ et $>$, parce qu'elles naissent immédiatement de l'inéquation

$$x^3 + A' x^2 + \text{etc.} < 0,$$

au lieu que, dans le troisième degré, elles naissent immédiatement d'une équation. Ainsi, dans ce cas, il y a des quasi-valeurs qui sont en-deçà, d'autres au-delà; mais néanmoins on voit qu'elles approchent toutes de la valeur de la racine, et la limite de x est celle qui s'en écarte moins; on voit que dans le quatrième exemple la deuxième quasi-valeur est assez

éloignée de sa racine, mais elle est néanmoins distincte de la première, qui est bien plus rapprochée.

Maintenant quand il y a des racines imaginaires, la première quasi-valeur, qui a toujours la forme qui lui convient, doit avoir une expression imaginaire, quand la première racine l'est. Mais une quasi-valeur quelconque peut avoir une expression imaginaire, à raison de ses trois radicaux $\sqrt{r}$, $\sqrt{\rho}$ et $\sqrt{R}$; d'abord s'il n'y a que le grand radical $\sqrt{R'}$ qui soit imaginaire, il est clair qu'il n'y a que les deux quasi-valeurs de la branche en ϕ', (*Voyez* le tableau (185)), qui puissent appartenir à la paire de racines imaginaires, parce qu'il n'y a que ces deux-là qui aient la même quantité réelle; savoir :

$$\tfrac{1}{4}(A - \sqrt{r} - \sqrt{\rho'}).$$

En deuxième lieu, si $\sqrt{\rho'}$ est imginaire, alors le grand radical $\sqrt{R'}$ est un radical double imaginaire, parce qu'il contient une fonction de $\sqrt{\rho'}$, ou plutôt $\sqrt{-\rho'}$: dans ce cas il faudra décomposer $\sqrt{R'}$, comme ci-dessus, par la formule $\sqrt{f \pm \sqrt{-h}}$ (136), on obtiendra un résultat de la forme $\sqrt{m} \pm \sqrt{-n}$. Maintenant pour former la paire de racines imaginaires, il faudra prendre une quasi-valeur dans la

branche en Φ', où l'on a $-\sqrt{\rho'}$, et l'autre dans la branche en Π' où l'on a $+\sqrt{\rho'}$ (185). Si $\sqrt{R'}$ par sa décomposition a le coëfficient de sa partie imaginaire négatif; si elle donne $-\sqrt{-n}$, on aura pour la paire d'imaginaires,

$$\begin{cases} x_1 - \| \tfrac{1}{2}\Phi' - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi'^2 - \dfrac{C'}{\varphi'}}, \\ x_2 - \| \tfrac{1}{2}\Pi' - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi'^2 - \dfrac{C'}{\pi'}}, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x_1 - \| \tfrac{1}{4}(A - \sqrt{m}) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{-\rho'} + \sqrt{-n}), \\ x_2 - \| \tfrac{1}{4}(A - \sqrt{m}) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{-\rho'} + \sqrt{-n}). \end{cases}$$

Si, au contraire, le coëfficient de $\sqrt{-n}$ est positif, la paire d'imaginaires sera

$$\begin{cases} x_2 - \| \tfrac{1}{2}\Phi' + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Phi'^2 - \dfrac{C'}{\varphi'}}, \\ x_3 - \| \tfrac{1}{2}\Pi' + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi'^2 - \dfrac{C'}{\varpi'}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - \| \tfrac{1}{4}(A + \sqrt{m}) - \tfrac{1}{4}(\sqrt{-\rho'} + \sqrt{-n}), \\ x_3 - \| \tfrac{1}{4}(A + \sqrt{m}) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{-\rho'} + \sqrt{-n}). \end{cases}$$

Ce n'est que par ce moyen qu'on obtiendra une paire de racines dont la partie réelle sera

égale, et la partie imaginaire égale avec un signe additionnel opposé dans les deux racines.

Dans le premier de ces deux cas la paire d'imaginaires appartiendra aux deux premières racines, et s'il n'y a que deux racines imaginaires, les deux dernières seront réelles.

Dans le deuxième cas les deux racines moyennes de l'équation seront imaginaires, et les deux extrêmes seront réelles.

Enfin, si le radical originel est imaginaire, ou si l'on a $\sqrt{-r}$, alors il faudra que l'une des deux imaginaires appartienne à la branche réductible, et l'autre à la branche irréductible pour que toutes les quantités imaginaires puissent avoir dans les deux racines un signe additionnel contraire.

Je ne m'étendrai pas davantage dans le premier mode de solution, sur ce qui concerne les racines imaginaires. C'est dans le deuxième mode de solution qu'on apprendra à distinguer les cas, 1°. où toutes les racines sont réelles; 2°. où il y en a deux de réelles et deux d'imaginaires; 3°. où toutes les quatre sont imaginaires. Ce que l'on vient de dire sert de base pour apprendre à faire cette distinction.

Néanmoins la méthode de concentration suffit avec ce qu'on vient de dire pour résou-

dre entièrement une équation du quatrième degré, et reconnaître la nature de ses racines. Si la petite racine est réelle : car on peut, par le moyen de la concentration, la connaître jusqu'au dernier terme d'approximation qu'on peut lui donner, puis la séparer de l'équation, et résoudre le reste par la méthode du troisième degré.

190. Il s'agit de faire voir, par des exemples, que lorsqu'il y a des racines imaginaires, la première quasi-valeur a toujours la forme qui lui convient.

$$\text{1}^{\text{er}}\text{ exemple.}\left\{\begin{array}{l}(x+1)(x+2)(x^2+6x+10)..=0\\ x^4+9x^3+30x^2+42x+20...=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x_1-\ \|\ 1{,}0385.\\ x_2-\ \|\ 2{,}4169.\end{array}$$

$$\text{2}^{\text{me}}\text{.........}\left\{\begin{array}{l}(x+2)(x+3)(x^2+14x+50).=0\\ x^4+19x^3+126x^2+334x.300=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x_1-\ \|\ 2{,}041.\\ x_2-\ \|\ 3{,}531.\end{array}$$

$$\text{3}^{\text{me}}\text{.........}\left\{\begin{array}{l}(x-1)(x+1)(x^2+14x+50).=0\\ x^4-14x^3+51x^2-14x+50..=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}x_1+\ \|\ 1{,}13.\\ x_2-\ \|\ 0{,}93.\end{array}$$

$$\text{4}^{\text{me}}\text{.........}\left\{\begin{array}{l}(x^2+3x+4)(x+1)(x+4)...=0\\ x^4+8x^3+23x^2+32x+16...=0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}x_1-\ \|\ 1{,}147.\\ \begin{array}{l}x_2\\ x_3\end{array}-\ \|\ 1{,}78\mp 0{,}94\sqrt{-1}.\\ x_4-\ \|\ 3{,}293.\end{array}\right.$$

$$\text{5}^{\text{me}}\text{.........}\left\{\begin{array}{l}(x+1)(x+2)(x^2+1)........=0\\ x^4+3x^3+3x^2+3x+2......=0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}\begin{array}{l}x_1\\ x_2\end{array}+\ \|\ 0{,}211\mp 0{,}956\sqrt{-1}.\\ x_3-\ \|\ 1{,}552.\\ x_4-\ \|\ 1{,}86.\end{array}\right.$$

$$\text{6}^{\text{me}}\text{.........}\left\{\begin{array}{l}(x^2+14x+50)(x^2+1)......=0\\ x^4+14x^3+51x^2+14x+50..=0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}x_1\\ x_2\end{array}\right.-\ \|\ 0{,}1\mp 1{,}08\sqrt{-1}.$$

Les trois premiers exemples de ce tableau ne souffrent aucune difficulté; on voit que les deux premières quasi-valeurs sont réelles,

parce que les racines auxquelles elles correspondent, sont aussi réelles.

Le quatrième et le cinquième, qui ne contiennent également que deux racines imaginaires, ont le radical $\sqrt{\rho'}$ imaginaire, ce qui rend $\sqrt{R'}$ un radical double imaginaire; alors l'inéquation abaissée

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' < 0$$

a son radical originel imaginaire; il se résout par la formule ci-dessus (170). On a pour le premier exemple,

$$\mathcal{S}C' = 8,6354 = > 0\,;$$

la première racine est donc la réelle, et les deux autres imaginaires; ainsi, dans ce cas, la première et la dernière racine de la proposée sont réelles, et les deux moyennes imaginaires.

Dans le cinquième exemple, on a

$$\mathcal{S}C' = -27,75 = < 0\,;$$

la petite racine est donc imaginaire, et par conséquent la paire de racines imaginaires appartient aux deux premières racines de l'équation. Ainsi, dans ce cinquième exemple, les deux premières quasi-valeurs ont encore la forme qui leur convient. On voit encore, dans ce dernier exemple, que le rang que tiennent les racines d'une équation, est dé-

terminé par leur partie réelle, quand elles sont imaginaires. Ici la partie réelle des deux racines du facteur

$$x^2 + 1 = 0$$

est nulle, voilà pourquoi elles appartiennent aux deux premières racines de l'équation.

Dans le sixième exemple, les quatre racines de la proposée sont imaginaires : les deux premières quasi-valeurs ont encore la forme qui leur convient. Les deux autres quasi-valeurs de la branche réductible ont la forme réelle, parce qu'elles sont les quasi-valeurs irréductibles propres à l'inéquation abaissée

$$x^3 + A' x^2 + \text{etc.}$$

On voit de cette manière qu'en décomposant une équation d'un degré quelconque en deux autres, dont l'une $(x + p)$ est simple, et l'autre a un degré de moins que la proposée; cette dernière, par sa décomposition successive, contient une suite de valeurs irréductibles, telle qu'il ne reste que la première racine qui ait une quasi-valeur dont on doive s'occuper, et que j'appelle *quasi-valeur de solution.*

Lorsque le radical originel de l'équation $\sqrt{r}$ est imaginaire, le cas irréductible n'a plus lieu : on l'a déjà vu dans le troisième degré; il en

est de même dans le quatrième, et ainsi des autres. En voici la raison : Quand tous les radicaux sont réels, leurs valeurs, par les différentes opérations du calcul, produisent une convergence vers la petite racine d'où résulte une divergence vers la grande. Mais quand ils sont imaginaires leur valeur ne se mèle pas avec les quantités réelles comme dans le premier cas, il faut une opération particulière pour dégager les quantités réelles qui sont embarrassées dans les radicaux imaginaires. Cette opération est trop compliquée pour le premier mode de solution, je la réserve pour le deuxième.

Quoique ce cas paraisse exiger plus de calcul, il est réellement le plus simple : il suffit de concentrer immédiatement la quasi-valeur $\psi = \frac{1}{4}A$. Si l'équation contient deux racines réelles, on tombera nécessairement dans une série de concentrations qui convergera vers la première ou la troisième racine, selon que les deux imaginaires appartiendront à la deuxième ou à la première paire des racines de l'équation. Soit par exemple l'équation

$$x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 30x + 20 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + 10)(x + 1)(x + 2),$$

et dont le radical originel est imaginaire

$$= \sqrt{-23};$$

j'ai

$$\psi = 0,75;$$

en le concentrant, j'ai

$$k\psi = 0,898.$$

$$k'\psi = 0,956.$$

Il est inutile de prolonger la série, on voit que ces termes sont convergens, parce que le deuxième pas de concentration est plus petit que le premier : dans ce cas-ci la convergence est vers la troisième racine $x = -1$, car les deux premières racines sont $x = 0$ pour la partie réelle.

Soit cet autre exemple

$$x^4 + 8x^3 + 29x^2 + 62x + 40 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + 3x + 10)(x + 1)(x + 4);$$

en concentrant ψ, j'ai

$$\psi = 2.$$

$$k\psi = 1,43.$$

$$k'\psi = 1,18.$$

On voit que dans ce cas la série converge vers la première racine qui est réelle $= 1$.

Soit encore l'équation

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + x + 2)(x + 1)^2 = 0,$$

et qui contient par conséquent deux racines égales et deux imaginaires; comme on a $\sqrt{-r}$, je concentre la quasi-valeur ⸸ $= \frac{1}{4}$ A, et j'ai

$$⸸ = 0{,}75.$$
$$k\,⸸ = 0{,}794.$$
$$k'\,⸸ = 0{,}825.$$

Dans ce cas la première des deux racines égales est la troisième de l'équation, et comme la quasi-valeur ⸸ est plus petite, la concentration mène à sa valeur; ainsi on rencontre encore dans ce cas une série de concentrations convergente.

Mais soit maintenant cet autre exemple :

$$x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 24x + 10 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + 4x + 10)(x + 1)^2,$$

et qui contient, comme dans le premier cas, deux racines réelles et deux imaginaires; en concentrant ⸸, j'ai

⸸ $= \frac{1}{4}$ A	=	1,5.
k ⸸	=	1,7778.
k' ⸸	=	2,7778.
k'' ⸸	=	− 2,43.
k''' ⸸	=	0,08.
k'''' ⸸	=	0,44.
k^v ⸸	=	0,83.

Dans cette suite de termes on voit d'abord que les trois premiers forment une série régulière de concentration, mais qui est divergente ; cela vient de ce que la quasi-valeur ψ, étant plus grande que chacune des deux racines égales, a dépassé leur valeur et converge vers la troisième racine, comme on l'a déjà vu.

La série de concentration, dans le terme suivant $k''\psi$, fait en quelque sorte un saut occasionné par la rencontre des deux racines imaginaires, qui la fait diverger en retrogradant au-delà de toutes les valeurs de l'équation. Elle revient ensuite, dans les termes suivans, former une série régulière et convergente de concentration vers la petite racine; de sorte que l'on a

$$p_{\prime}\begin{cases} > 0,83. \\ < 1,5. \end{cases}$$

Pour faire converger la concentration de la limite 1,5, je m'y prends de cette manière : Le terme suivant étant

$$k\psi = 1,7778,$$

je le fais d'abord $= 1,8$, puis j'observe que le pas de concentration en divergeant $= 0,3$, je le rends convergent en retranchant ce nombre de la limite 1,5 ; j'ai donc

$$k\psi = 1,2,$$

d'où j'obtiens, en concentrant à l'ordinaire,

$$k' \nmid = 1,284;$$

je n'ai donc pas franchi la valeur puisque je m'éloigne; je retranche de 1,2 le pas de concentration qui est 0,034, et j'ai

$$k' \nmid = 1,066,$$

je concentre encore, j'ai

$$k'' \nmid = 1,187;$$

en retrogradant

$$k'' \nmid = 1,145,$$

le pas de concentration étant 0,021. Je concentre à présent l'autre limite 0,83, et j'obtiens

$$p_1 > 0,845,$$

le pas convergent

$$= 0,015;$$

je joins ces deux limites opposées

$$p_1 \begin{cases} > 0,845, \\ < 1,145, \end{cases}$$

et j'en prends la moitié qui me donne

$$p_1 \parallel 0,99;$$

en concentrant de nouveau, je verrai si je suis en-deçà ou au-delà de la racine. Par ce moyen on peut concentrer les racines égales en nombre pair comme les autres.

Soit enfin l'équation qui ne contient que des racines imaginaires,

$$x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 9x + 10 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 5);$$

en concentrant $\downarrow$, j'ai

$$\downarrow = 0,75.$$
$$k\ \downarrow = 2,84.$$
$$k'\ \downarrow = 1,31.$$
$$k'\ \downarrow = 10,9.$$
$$k''\ \downarrow = 0,06.$$
$$k'''\downarrow = 1,25.$$
$$k^{\text{IV}}\ \downarrow = 7,3.$$

On voit que cette série de concentration est alternative et divergente : on ne rencontre aucune trace de série régulière; d'où il faut conclure que les quatre racines de l'équation sont imaginaires. Sa propriété d'être alternative me fait conclure que la partie réelle d'une des racines est entre $\downarrow$ et $k\downarrow$; je les concentre par compensation; j'ai d'abord pour la quasi-valeur moyenne

$\mu = 1,8$ }
$k\mu = -3$ } $-0,64$ } .... $= \mu'$.
$0,03$ } .... $= \mu''$.
$k\mu' = \ldots\ldots\ 0,67$ } $0,585$ } .... $= \mu'''$.
$k\mu'' = \ldots\ldots\ldots\ 1,14$ } $1,89$ .... $= \mu^{\text{IV}}$.
$k\mu''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2,195$ }

par ce moyen j'obtiens une série de concentration convergente jusqu'à $\mu''' = 0,585$, parce que $\mu^{IV} = 1,89$ surpasse le premier terme 1,8; c'est donc à μ''' que la série de concentration finit sa convergence. Je ne puis donc avoir pour la partie rationnelle de cette racine, que la quasi-valeur $x = -0,585$, tandis que la vraie valeur est $x = -0,5$. Ainsi ce mode de concentration ne peut pas conduire aux valeurs exactes de la partie réelle des racines imaginaires.

Au reste, les racines imaginaires qui se trouvent dans une équation, formant toujours des facteurs doubles dont tous les termes sont réels, on voit que pour les résoudre il faut décomposer l'équation en facteurs du deuxième degré. C'est à quoi l'on parvient encore par le calcul des inéquations, comme on le verra ci-après. Auparavant, il est nécessaire de continuer le développement des méthodes qui appartiennent à la décomposition des équations en facteurs simples.

DEUXIÈME SECTION.

Deuxième mode de solution, ou mode de solution double.

191. Dans le mode précédent j'ai considéré toutes les racines du même signe, et je les ai supposées toutes négatives : dans ce mode-ci les racines de l'équation peuvent avoir des signes différens, les unes positifs, et les autres négatifs ; car le principe de ce mode est de transformer la proposée en deux autres équations, dont les racines sont toutes positives, comme on l'a déjà vu dans la résolution des équations du troisième degré.

Je reprends donc les deux quasi-valeurs originelles $p > \varpi$ et $p < \varphi$, qui conviennent à toute espèce d'équation du quatrième degré, quel que soit le signe de leur racine, et je fais comme ci-dessus :

$$x = -(\varpi + z) \text{ et } x = -(\varphi - z');$$

en substituant ces valeurs dans la proposée, j'ai

$$\left.\begin{array}{r} z^4 + 4\varpi \\ -\ A \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{r} +6\varpi^2 \\ -3A\varpi \\ +\ B \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{r} +4\varpi^3 \\ -3A\varpi^2 \\ +2B\varpi \\ -\ C \end{array}\right\} z \left.\begin{array}{r} +\varpi^4 \\ -A\varpi^3 \\ +B\varpi^2 \\ -C\varpi \\ +D \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} z'^4 - 4\phi \\ + A \end{array}\right\} z'^3 \left.\begin{array}{r} +6\phi^2 \\ -3A\phi \\ +B \end{array}\right\} z'^2 \left.\begin{array}{r} -4\phi^3 \\ +3A\phi^2 \\ -2B\phi \\ +C \end{array}\right\} z' \left.\begin{array}{r} +\phi^4 \\ -A\phi^3 \\ +B\phi^2 \\ -C\phi \\ +D \end{array}\right\} = 0.$$

Comme ces deux équations doivent avoir toutes leurs racines positives, je fais immédiatement la première pour ϖ,

$$z^4 - a z^3 + b z^2 - c z + d = 0\,;$$

la deuxième pour ϕ,

$$z'^4 - a z'^3 + b z'^2 - \gamma z' + \delta = 0.$$

J'exprime les deux premiers coëfficiens par les deux mêmes lettres, parce qu'ils sont les mêmes dans les deux équations, comme on l'a déjà vu et comme on va le voir; car en substituant les valeurs des coëfficiens en valeurs de coëfficiens de la proposée, j'ai

192. 1°. $$\left\{\begin{array}{l} a = 3\sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3\sqrt{r} \\ b = 3\left(A^2 - \frac{8}{3}B\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3r \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pour } \varpi \\ \text{et } \phi. \end{array}$$

2°. $$\left\{\begin{array}{l} c = \frac{1}{16}\left[2.9r\sqrt{r} - (-2A^3 + 8AB - 16C)\right] = \frac{1}{4^2}\left(2.9r\sqrt{r} - S_4C\right). \\ \gamma = \frac{1}{16}\left[2.9r\sqrt{r} + (-2A^3 + 8AB - 16C)\right] = \frac{1}{4^2}\left(2.9r\sqrt{r} + S_4C\right). \end{array}\right.$$

J'appelle S_4C la relation rationnelle des trois premiers coëfficiens jusqu'à C, savoir :

$$-2A^3 + 8AB - 16C,$$

et je me sers de la notation S_4C pour exprimer que c'est la relation des trois premiers qui appartiennent au quatrième degré.

En décomposant cette relation, on a

$$-2A^3+8AB-16C=-3A(A^2-\frac{8}{3}B)+(A^3-16C);$$

or A^3-16C est la relation de A à C qui est telle que cette expression est $=0$, quand toutes les racines sont égales, comme l'autre relation $A^2-\frac{8}{3}B$. Ainsi $\mathcal{S}_4C$ exprime la différence des deux relations de A à B et de A à C.

$$3°.\ d=\frac{1}{4^4}\begin{cases}-3A^4+4^2A^2B-4^3AC+4^4D+3^3r^2,\\ -3.4(-2A^3+8AB-16C)\sqrt{r},\end{cases}$$

je l'exprime ainsi :

$$d=\frac{1}{4^4}(\mathcal{S}D+3^3r^2-3.4\mathcal{S}_4C\sqrt{r}),$$

puis

$$\delta=\frac{1}{4^4}(\mathcal{S}D+3^3r^2+3.4\mathcal{S}_4C\sqrt{r}).$$

J'appelle $\mathcal{S}D$ la relation rationnelle de tous les coëfficiens de la proposée : elle est l'expression du dernier terme

$$\varpi^3-A\varpi^2,\ \text{etc. et}\ \varphi^3-A\varphi^2,\ \text{etc.},$$

lorsqu'on fait $\sqrt{r}=0$. Il en est de même de $\mathcal{S}_4C$ pour le terme précédent.

En décomposant $\mathcal{S}D$ en ses élémens, on a

$$\mathcal{S}D=-6A^2(A^2-\frac{8}{3}B)+4A(A^3-16C)-(A^4-4^4D);$$

c'est-à-dire que $\mathcal{S}D$ exprime les relations de A à B, de A à C, de A à D, qui sont encore telles que toutes sont $=0$, quand toutes les racines sont égales. Cette loi est remarquable.

En réunissant les différentes expressions des coëfficiens, on a l'équation générale de complément.

193. z^4.

$$\begin{aligned}
&- z^3 \times 3\sqrt{r}.\\
&+ z^2 \times 3r.\\
&- z \times \tfrac{1}{4^2}(2.9r\sqrt{r} \mp S_4C).\\
&+ 1 \times \tfrac{1}{4^4}(SD + 3^3 r^2 \mp 3.4 S_4 C\sqrt{r}).
\end{aligned}$$

On peut exprimer généralement cette équation par celle-ci toute seule :

$$x^4 - \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 - \mathrm{c}x + \mathrm{d} = 0.$$

Toutes les fois que je la considérerai ainsi généralement, les lettres c et d auront une valeur double.

Je résous cette équation indépendamment des signe négatifs, comme j'ai fait pour le troisième degré (124) ; j'aurai par conséquent les mêmes formules, et le même ordre de racines que pour la résolution des équations aux racines négatives ; j'ai donc d'abord

194. $\sqrt{\mathrm{a}^2 - \frac{8}{3}\mathrm{b}} \ldots = \sqrt{\mathrm{A}^2 - \frac{8}{3}\mathrm{B}} = \sqrt{r}.$

$$\begin{aligned}
&\Delta P < \tfrac{3}{4}(\mathrm{a} + \sqrt{r}) \ldots\ldots = < 3\sqrt{r} \ldots\ldots = < \Delta\Pi.\\
&\Delta p_1 > \tfrac{1}{4}(\mathrm{a} - 3\sqrt{r}) \ldots = > 0 \ldots\ldots\ldots = > \Delta\varpi.\\
&\Delta P > \tfrac{3}{4}(\mathrm{a} - \sqrt{r}) \ldots = > \tfrac{3}{2}\sqrt{r} \ldots\ldots = > \Delta\Phi.\\
&\Delta p_4 < \tfrac{1}{4}(\mathrm{a} + 3\sqrt{r}) \ldots = < \tfrac{3}{2}\sqrt{r} \ldots\ldots = < \Delta\varphi.
\end{aligned}$$

Pour compléter la première quasi-valeur originelle $\Delta\varpi$, qui est toujours la plus petite en nombre, puisqu'elle est $=0$, on a la formule

$$\Delta p_1 > \frac{d}{c-(b-\Delta\Pi\Delta\varpi)\Delta\varpi},$$

qui se réduit à

$$\frac{d}{c} \text{ et } \frac{\delta}{\gamma},$$

on a donc, pour quasi-valeur complète des deux complémens de ϖ et de φ,

$$195.\quad \Delta p_1 > \frac{SD+3^3r^2 \mp 3.4S_4C\sqrt{r}}{4^2(2.9r\sqrt{r} \mp S_4C},$$

et pour concentrer cette double quasi-valeur, on a la formule

$$196.\quad \Delta p_1 > \frac{d}{c-(b-k(\Delta\Pi.\Delta\varpi))k\Delta\varpi}.$$

Pour résoudre les valeurs de z, je ramifie l'équation comme ci-dessus (186), et je ne prends que la branche réductible, j'ai d'abord pour résoudre l'équation indéterminée,

$$z^3 - \Delta P z^2 + \Delta Q z - \Delta R = 0.$$

$$\Delta P > \Delta\Phi \ldots\ldots => \tfrac{1}{4}\sqrt{r} \ldots\ldots\ldots\ldots => a'.$$

$$\Delta Q > \frac{c\Delta\phi - d}{\Delta\phi^2} . => \frac{1}{9.4^3}\left(\frac{3^4.5r^2 - SD \mp 3.4S_4C\sqrt{r}}{r}\right) => b'.$$

$$\Delta R > \frac{d}{\Delta\phi} \ldots => \frac{1}{6.4^3}\left(\frac{3^3r^2 + SD \mp 3.4S_4C\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\right) => c'.$$

Et pour résoudre maintenant la double inéquation

$$z^3 - a'z^2 + b'z - c' < o,$$

on a d'abord

$$\sqrt{a'^2 - 3b'} = \sqrt{\frac{3^3 r^2 + SD \pm 3.4 S_4 C\sqrt{r}}{3.4^3 r}} = \sqrt{\rho}.$$

$$\Delta P < \Delta \pi' \ldots = < \tfrac{2}{3}(a' + \sqrt{\rho} \ldots = < \sqrt{r} + \tfrac{2}{3}\sqrt{\rho}.$$

$$\Delta p_1 > \Delta \varpi' \ldots = > \tfrac{1}{3}(a' - 2\sqrt{\rho}) .. = > \tfrac{1}{2}\sqrt{r} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\rho}.$$

$$\Delta P > \Delta \Phi' \ldots = > \tfrac{2}{3}(a' - \sqrt{\rho}) \ldots = > \sqrt{r} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\rho}.$$

$$\Delta p_3 < \Delta \varphi' \ldots = < \tfrac{1}{3}(a' + 2\sqrt{\rho}) .. = < \tfrac{1}{2}\sqrt{r} + \tfrac{3}{2}\sqrt{\rho}.$$

Et par conséquent on a pour la première quasi-valeur de z, comme dans la résolution du troisième degré,

$$z_1 < \tfrac{1}{2}\Delta\Phi' - \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta\Phi'^2 - \frac{4c'}{\Delta\varphi'}};$$

et en mettant les valeurs

$$z_1 < \tfrac{1}{2}(\sqrt{r} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\rho}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{r} - \tfrac{2}{3}\sqrt{\rho})^2 - \left(\frac{3^3 r^2 + SD \mp 3.4 S_4 C\sqrt{r}}{4^2\sqrt{r}(3\sqrt{r} + 4\sqrt{\rho})}\right)}$$

Je sépare maintenant les deux complémens de ϖ et de φ, et je réunis à ces quasi-valeurs celles de $k\Delta\varpi$, en appelant ρ', le radical

$$\sqrt{3^3 r^2 + SD + 3.4 S_4 C\sqrt{r}},$$

et ρ_1 l'autre radical

$$\sqrt{3^3 r^2 + SD - 3.4 S_4 C\sqrt{r}}, \text{ on a}$$

197.

$$z_{,}\begin{cases} > \dfrac{3^3r^3+SD-3.4S_4C\sqrt{r}}{4^3(2.9r\sqrt{r}-S_4C)} \cdots\cdots =>k\Delta\varpi. \\ < \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{r} \cdots\cdots \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3^3r^3+SD+3.4S_4C\sqrt{r}}{3.4^3r}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\varrho} \end{cases} \cdots\cdots =\frac{1}{2}\Delta\Phi'. \\ \quad -\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{r}-\frac{1}{3}\sqrt{\varrho})^2-\left(\dfrac{3^3r^3+SD-3.4S_4C\sqrt{r}}{4^3\sqrt{r}(3\sqrt{r}+4\sqrt{\varrho})}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta\Phi'^2-\dfrac{4c}{\Delta\varphi}} \end{cases}$$

$$z_{,}'\begin{cases} > \dfrac{3^3r+SD+3.4S_4C\sqrt{r}}{4^3(2.9r\sqrt{r}-S_4C)} \cdots\cdots =>k\Delta'\varpi. \\ < \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{r} \cdots\cdots \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3^3r^3+SD-3.4S_4C\sqrt{r}}{3.4^3r}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\varrho_{,}} \end{cases} \cdots\cdots =\frac{1}{2}\Delta'\Phi'. \\ \quad -\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{r}-\frac{1}{3}\sqrt{\varrho_{,}})^2-\left(\dfrac{3^3r^3+SD+3.4S_4C\sqrt{r}}{4^3\sqrt{r}(3\sqrt{r}+4\sqrt{\varrho_{,}})}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta'\Phi'^2-\dfrac{4\gamma'}{\Delta\varphi}} \end{cases}$$

Cette double formule présente la marche des opérations à faire pour parvenir à la formule simple,

$$z<\frac{1}{2}\left(\Delta\Phi'-\sqrt{\Delta\Phi'^2-\frac{4c'}{\Delta\varphi'}}\right)$$

On voit que pour obtenir les quasi-valeurs de $z_{,}$ et de $z_{,}$, il n'est pas nécessaire de former la double équation en z, il suffit de connaître les valeurs de r ou S_4B, de S_4C et de SD, qui expriment les relations des coëfficiens de la proposée. La formule ne renferme

que ces trois expressions diversement combinées.

Ce n'est que pour la concentration qu'il est nécessaire de former l'équation en z, parce que c'est avec les coëfficiens a, b, c, d, qu'on effectue les différens degrés de concentration.

Ces deux limites étant chacune la petite quasi-valeur d'une équation du quatrième degré, ont toujours la forme qui leur convient, si elles sont toutes deux réelles, ou si une seule est réelle, on la concentre et on abaisse la proposée au troisième degré, et quand ces limites sont imaginaires, on parvient par ces formules à distinguer et à séparer les racines réelles lorsqu'il s'en trouve dans l'équation, comme on le verra.

198. En substituant ces deux limites dans les équations

$$x = -(\varpi + z),$$
$$x = -(\rho - z),$$

on a la formule

$$x_1 - < \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}\mathrm{A} \ldots\ldots & = \frac{1}{4}\mathrm{A}. \\ -\frac{1}{4}\sqrt{r} \ldots\ldots & = -\frac{1}{4}\sqrt{r}. \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3^3 r^3 + S\mathrm{D} + 3.4\, S_4 \mathrm{C}\sqrt{r}}{3.4^3 r}} \ldots\ldots & = -\frac{1}{3}\sqrt{\rho}. \\ -\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{r} - \frac{1}{3}\sqrt{\rho})^2 - \left(\dfrac{3^3 r^3 + S\mathrm{D} - 3.4\, S_4 \mathrm{C}\sqrt{r}}{4^2\sqrt{r}(3\sqrt{r} + 4\sqrt{\rho})}\right)} & = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{R}}. \end{array} \right.$$

$$x_4 \to \begin{cases} \frac{1}{4}\mathrm{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}\mathrm{A}. \\ +\frac{1}{4}\sqrt{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{4}\sqrt{r}. \\ +\frac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3^3 r^2 + \mathcal{S}\mathrm{D} - 3.4\mathcal{S}_4\mathrm{C}\sqrt{r}}{3.4^3 r}} \ldots\ldots\ldots = +\frac{1}{3}\sqrt{\varrho}; \\ +\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{r}-\frac{1}{3}\sqrt{\varrho})^2 - \left(\dfrac{3^3 r^2 + \mathcal{S}\mathrm{D} + 3.4\mathcal{S}_4\mathrm{C}\sqrt{r}}{4\sqrt{r}(5\sqrt{r}+4\sqrt{\varrho})}\right)} = +\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{R}}; \end{cases}$$

Cette formule servira pour la résolution des équations à plusieurs variables. On voit qu'elle est formée d'une manière analogue aux formules des degrés précédens. Sa partie rationnelle est $=\frac{1}{4}\mathrm{A}$. Dans le troisième degré elle est $=\frac{1}{3}\mathrm{A}$, et dans le deuxième elle est $=\frac{1}{2}\mathrm{A}$. Elle renferme ensuite trois différens radicaux, dont le deuxième est une fonction du premier, et le troisième une fonction des deux premiers. Ce sont les valeurs de ces radicaux qui déterminent l'inégalité des racines, et leur valeur est telle que non-seulement ils sont $=0$, quand toutes les racines sont égales, mais ils sont composés d'élémens qui sont tous séparément égaux à zéro.

Avant de développer ce qui concerne les racines imaginaires, il est nécessaire d'appliquer ce qu'on vient de dire à des exemples, et je me bornerai à la résolution de l'équation

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0,$$

dont les racines de différens signes sont :

$$(x-2)(x-1)(x+2)(x+3);$$

j'ai d'abord

$\sqrt{r}\ldots\ldots = \quad 4,76095.$

$P < \Pi\ldots = < \quad 5,07071.$

$p_1 > \varpi\ldots = > -3,07071 = - < 3,07071.$

$P > \Phi\ldots = > -2,07071 = - < 2,07071.$

$p_4 < \varphi\ldots = < \quad 4,07071.$

Puis j'ai

$$\delta C = 0,$$

$$\delta D = 3600.$$

La valeur de $\delta_4 C$ étant $= 0$, fait que

$$c = \gamma,\ d = \delta,$$

et les deux valeurs de $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{\rho_1}$ sont les mêmes, et par la même raison $z = z_1$. Ainsi l'équation en z est simple, on a

$$c = 121,40423,$$

$$d = 68,25.$$

On a ensuite pour les deux limites opposées de z,

$$z\begin{cases} > k\Delta\varpi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = > 0,5623. \quad (197) \\ < \frac{1}{2}\left(\Delta\Phi' - \sqrt{\Delta\Phi'^2 - \frac{4c'}{\Delta\varphi}}\right) = < 1,112336. \end{cases}$$

Pour concentrer la limite supérieure,

je fais $k\,\Delta\varpi = 0,6$ } différence 0,2018.
j'ai... $k'\Delta\varpi = 0,8018$ }

Pour concentrer la quasi-valeur de $z_1 = \xi$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{je fais } \xi = 1{,}1 \\ \text{j'ai.. } k\xi = 1{,}09103\end{array}\right\} \text{différence } 0{,}00897\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{je fais ensuite } \xi = 1 \\ \text{j'ai........ } k\xi = 1{,}02328\end{array}\right\} \text{différence } 0{,}02328.$$

Dans ce dernier cas j'ai pris une valeur trop petite puisque la concentration augmente la valeur 1, supposée à ξ, j'ai donc

$$z_1 \left\{\begin{array}{l} < 1{,}1\,, \\ > 1\,; \end{array}\right.$$

mais on voit par les deux différences que la vraie valeur est plus près de 1,1 que de 1 de l'autre côté.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Je fais } \xi = 1{,}07 \\ \text{j'ai... } k\xi = 1{,}070288\end{array}\right\} \text{différence } 0{,}000288.$$

La différence étant très-petite, je m'arrête là, et comme la concentration va en croissant, je dois faire

$$z_1 = 1{,}0703\,;$$

en appliquant cette valeur aux deux équations

$$x = -(\varpi + z),$$
$$x = -(\varphi - z),$$

j'ai

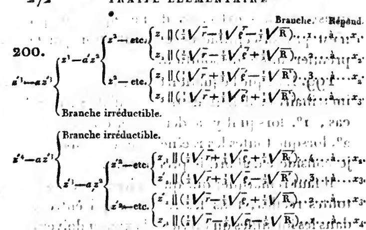
$$x_1 = -2{,}00001\,,$$
$$x_4 = 3{,}00001.$$

On voit comment, par ce second mode de solution, on parvient à concentrer les deux

quasi-valeurs extrêmes d'une équation qui n'est pas susceptible de concentration par le premier mode de solution.

199. Lorsque l'équation contient des racines imaginaires, il faut distinguer d'abord deux cas, 1°. lorsqu'il y a deux racines réelles; 2°. lorsque toutes les racines sont imaginaires, je considère d'abord le premier cas. Des racines imaginaires.

Il faut remarquer que quand les racines sont toutes réelles, tous les radicaux qui entrent dans les formules qu'on vient d'exposer doivent être réels, car elles n'expriment que les quasi-valeurs réductibles de z et de z'. Mais lorsqu'il y a deux racines imaginaires, alors il faut que quelques-uns de ces radicaux soient imaginaires; ils peuvent l'être tous les trois. Pour développer ces différens cas, je forme le tableau suivant de la ramification des quasi-valeurs de z et z' :



Ce tableau présente la manière dont les quasi-valeurs réductibles de z et z' s'appliquent aux valeurs de x : en partant des deux extrémités de l'équation, elles prennent leur accroissement en sens contraire, et vont s'appliquer, celles de z, sur les trois premières racines, et celles de z' sur les trois dernières ; de sorte qu'elles sont superposées dans les racines intermédiaires. Il n'y a dans les équations, dont les racines sont toutes réelles, que les deux quasi-valeurs extrêmes et non superposées, dont on fait usage.

Supposons maintenant que $\sqrt{R}$ seul soit imaginaire, alors la paire de racines imaginaires ne peut appartenir qu'aux deux premières branches de z, savoir : à z_1 et z_2. Ces deux quasi-

valeurs ont leur partie réelle égale, ainsi que la partie imaginaire, mais avec un signe contraire. De sorte que les deux petites racines de l'équation sont imaginaires, et les deux autres réelles.

Si c'était $\sqrt{R}$, qui fût imaginaire, la paire de racines imaginaires appartiendrait aux deux quasi-valeurs de z_1' et z'_2 par la même raison, alors les deux petites racines de l'équation seraient réelles, et les deux grandes imaginaires.

Enfin si les deux grands radicaux étaient imaginaires, les quatre racines de l'équation seraient imaginaires.

Maintenant supposons $\sqrt{\rho'}$ imaginaire, le dernier radical $\sqrt{R}$, qui est une fonction de ce radical, serait un radical imaginaire composé. Il faudrait le décomposer par la formule

$$\sqrt{a \pm \sqrt{-b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b}},$$

dans laquelle le premier radical est nécessairement réel, et le second un radical imaginaire simple. Alors si ce radical est du même signe que $\sqrt{\rho'}$, ce qui a lieu quand racine $\sqrt{R}$ est de la forme

$$\sqrt{a + \sqrt{-b}},$$

la première branche appartient à une des deux racines imaginaires, et la deuxième racine

imaginaire appartient à la troisième branche, parce que, dans cette branche, $\sqrt{R'}$ ne diffère de $\sqrt{R}$ que parce qu'il contient le radical $\sqrt{\rho'}$ avec un signe contraire à celui qu'il a dans $\sqrt{R}$; il suit de là que $\sqrt{R'}$ est de la forme

$$\sqrt{a-\sqrt{-b}},$$

et par conséquent sa partie réelle est négative, et sa partie imaginaire positive; il en résulte une deuxième quasi-valeur qui a sa partie réelle égale à celle de la première branche, et tous ses radicaux imaginaires positifs, tandis que ceux de la première branche sont tous négatifs. Ces deux branches forment donc la branche de racines imaginaires; c'est-à-dire que l'équation a ses deux premières racines imaginaires.

Si le radical $\sqrt{R}$ était de la forme

$$\sqrt{a-\sqrt{-b}},$$

le radical imaginaire simple, qui en ressortirait par sa décomposition, se trouverait positif dans la première branche, et par conséquent d'un signe contraire à $\sqrt{\rho'}$. Ce n'est que dans la deuxième branche que les deux radicaux imaginaires sont négatifs, elle appartient donc à l'une des deux racines imaginaires, et c'est la quatrième branche qui forme

la deuxième, parce que $\sqrt{R'}$ étant alors de la forme

$$\sqrt{a + \sqrt{-b}},$$

le radical imaginaire simple que sa décomposition fournit est positif comme $\sqrt{\rho'}$, et cette branche a tout ce qui convient pour faire une paire d'imaginaires avec la deuxième. Dans ce cas la première et la dernière racine de l'équation sont réelles, et les deux intermédiaires sont imaginaires. Je suppose ici que les radicaux de la branche z' sont réels. Si le dernier radical $\sqrt{R_{\prime}}$ était imaginaire, alors toutes les racines de l'équation seraient imaginaires.

Ce que je viens de dire, relativement à la branche des quasi-valeurs de z, s'applique également à la branche des quasi-valeurs de z'.

On peut remarquer ici que quand le radical $\sqrt{\rho'}$ et même les deux radicaux $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{\rho_{\prime}}$ sont imaginaires, il suit de là que l'équation proposée a deux racines réelles et deux imaginaires. La double expression de ces deux radicaux

$$= \sqrt{\frac{3^3 r^2 + \delta D \pm 3.4 \delta_4 C \sqrt{r}}{3.4^2 r}},$$

contenue dans le radical, est la même que celle de d et δ, à l'exception que le double signe $\mp$ est pris dans un sens contraire, si

ce radical est imaginaire pour la première de ces deux valeurs, il s'ensuit que δ, qui est le dernier de l'équation en z', est négatif ; or toute équation du quatrième degré, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, par conséquent la proposée a deux racines réelles (on suppose $\sqrt{r}$ réelle). Si les deux radicaux $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{\rho_{,}}$ étaient négatifs, d et δ le seraient aussi, et par conséquent, dans ce cas, la proposée aurait encore deux racines réelles et deux imaginaires ; mais dans ce cas ce serait nécessairement les deux racines intermédiaires qui seraient imaginaires.

201. Je viens maintenant au cas où $\sqrt{r}$ est imaginaire, alors toutes les quasi-valeurs de l'équation sont affectées de quantités imaginaires. $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{\rho_{,}}$ sont des radicaux imaginaires composés doubles, et les grands radicaux $\sqrt{\text{R}}$, $\sqrt{\text{R}'}$, etc. sont des radicaux imaginaires triples. Avec tout cela la proposée peut n'avoir que deux racines imaginaires. Pour débrouiller ce chaos, je commence par décomposer d'abord $\sqrt{\rho'}$ par la formule ci-dessus de

$$\sqrt{a \pm \sqrt{-b}} = \text{, etc. (156)};$$

en substituant leurs valeurs dans les grands radicaux de la ramification de z, ils ne sont plus que des radicaux imaginaires doubles :

je les décompose ensuite de la même manière pour en faire des radicaux imaginaires simples; cela posé je suppose que $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{R}$ de la première branche soient tous deux de la forme

$$\sqrt{a+\sqrt{-b}},$$

cette branche appartiendra à une racine imaginaire; car on aura d'abord une quasi-valeur de la forme

$$z_1 \parallel \tfrac{1}{2}\sqrt{r}-m-\sqrt{-n}-m'-\sqrt{-n'},$$

qui étant appliquée à x donne

$$x_1 \parallel \tfrac{1}{4}A-m-m'-(\tfrac{1}{4}\sqrt{r}+\sqrt{-m}+\sqrt{-n'}).$$

Je puis conclure de là immédiatement qu'il y a une autre racine de la forme

$$x_2 \parallel \tfrac{1}{4}A-m-m'+(\tfrac{1}{4}\sqrt{r}+\sqrt{-m}+\sqrt{-n'});$$

mais il est aisé de la trouver : elle ne peut se trouver que dans la ramification de z', parce que les quasi-valeurs originelles ϖ et φ appartiennent à la paire de racines imaginaires; or elles se trouvent précisément dans la première branche de z', car $\sqrt{\rho_1}$ ne diffère de $\sqrt{\rho'}$ que parce qu'il contient le radical $\sqrt{-r}$ avec un signe contraire, il est donc de la forme

$$\sqrt{a-\sqrt{-b}},$$

par la même raison $\sqrt{R_1}$ ne diffère de $\sqrt{R}$ que parce qu'il contient le radical $\sqrt{\rho_1}$ avec un signe

contraire, il est donc aussi de la forme

$$\sqrt{a-\sqrt{-b}},$$

on aura donc z_1' de la forme

$$z_1 \parallel \tfrac{1}{2}\sqrt{r}-m+\sqrt{-n}-m'+\sqrt{-n'},$$

et par conséquent on aura pour x la deuxième racine imaginaire telle qu'on vient de l'exprimer.

Il faut remarquer qu'aucune des autres branches ne pourrait y satisfaire. Si $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{R}$ étaient de la forme $\sqrt{a-\sqrt{-b}}$, la première racine imaginaire ne pourrait appartenir qu'à la quatrième branche de z, pour avoir une expression de la même forme que la précédente; et celle qui lui correspond dans la branche de z' est aussi la quatrième.

Si $\sqrt{\rho'}$ était de la forme $\sqrt{a+\sqrt{-b}}$, et $\sqrt{R}$ de la forme $\sqrt{a-\sqrt{-b}}$, ce serait la deuxième branche de z et de z' qui formerait la paire de racines imaginaires. Enfin, si $\sqrt{\rho'}$ était de la forme $\sqrt{a-\sqrt{-b}}$, et $\sqrt{R}$ de la forme $\sqrt{a+\sqrt{-b}}$, ce serait la troisième branche de z et de z' qui la formerait.

Quand on a obtenu la paire de quasi-valeurs imaginaires, on en forme une inéquation du deuxième degré, qui a la forme

$$x^2+2gx+g^2+h^2 \parallel 0:$$

h^2 exprime la quantité qui constitue la partie

imaginaire des deux racines. Il est aisé, d'après cela, d'obtenir une autre inéquation du deuxième degré, et qui appartienne aux deux autres racines de l'équation. Je me borne ici à indiquer ces différentes opérations, qui exigent un calcul assez long, et qu'il ne faut jamais employer dans la résolution pratique.

Quand $\sqrt{r}$ est imaginaire, la véritable quasi-valeur originelle de l'équation est $p \,\|\, \downarrow$ ou $p \,\|\, \frac{1}{4}A$. Il faut concentrer cette quasi-valeur; si l'équation contient deux racines réelles, on aboutira à une série convergente qu'on reconnaîtra aisément, et on parviendra à la valeur des racines réelles.

Par le calcul des inéquations, on parvient à décomposer les équations du quatrième degré en deux facteurs du deuxième, les équations du cinquième degré en un facteur du deuxième et un du troisième, etc. comme on le verra ci-après. C'est dans ce mode de solution qu'on parvient, par un calcul très-simple, à décomposer en facteurs réels du deuxième degré, les équations d'un degré pair, qui ne contiennent que des racines imaginaires.

Je finirai cet article par l'application de ce que l'on vient de dire sur les racines imaginaires à un exemple; je choisis l'exemple quatre ci-dessus (190) :

$$x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 32x + 16 = 0,$$

dans lequel la première et la dernière racine sont réelles, et les deux intermédiaires imaginaires. J'ai d'abord

$\sqrt{r} = 1,632683$	$a = 4,89804.$
$\Pi = 7,224512$	$b = 8.$
$\varpi = 0,775488$	$c = 8,89805.$
$\Phi = 4,775488$	$\gamma = 0,89805.$
$\varphi = 3,224512$	$d = 1,64805.$
$S_4C = -64$	$\delta = -8,14805.$
$SD = -1024$	$\sqrt{\rho'} = \sqrt{-407402}.$
	$\sqrt{\rho_{,}} = 0,90775.$

La quasi-valeur de $\sqrt{\rho'}$ étant imaginaire, je prends dans la formule (197) la quasi-valeur de $z'_{,}$, ou la quasi-valeur de la limite inférieure. Je trouve que tous les radicaux sont réels, et j'ai pour résultat

$$z'_{,} \parallel -1,10913.$$

Pour concentrer cette quasi-valeur, comme la série de concentration sera alternative, à cause que cette quasi-valeur est négative, j'emploie la concentration de compensation.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Je fais.} & \xi = -1 & \left.\right\} -0,725 & & & \ldots\ \mu. \\
\text{J'ai}\ldots & k\xi = -0,55 & & \left.\right\} -0,78325 & & \ldots\ \mu'. \\
 & k\mu = \ldots & -0,8415 & & \left.\right\} -0,77418 & \ldots\ \mu''. \\
 & k\mu' = \ldots & & -0,76511 & & \left.\right\} -0,775465 = \mu'''. \\
 & k\mu'' = \ldots & & & -0,77675 &
\end{array}$$

En prenant la dernière quasi-valeur de cette suite μ''', et la substituant dans

$$x = -(\varphi - z'),$$

j'ai

$$x = -3{,}999977,$$

et la racine est $x = -4$.

On voit par cet exemple, qui a déjà été traité, qu'on peut se dispenser d'entrer dans le calcul des quantités imaginaires, lorsqu'il y a des racines réelles dans l'équation. Cependant si les deux radicaux $\sqrt{\rho'}$ et $\sqrt{\rho_{,}}$ étaient tous deux imaginaires, il faudrait bien calculer ces espèces de racines. Voilà pourquoi je vais m'occuper de la valeur de $z_{,}$.

202. En réduisant les différentes valeurs en nombre, et faisant disparaître le radical imaginaire du dénominateur, ce à quoi l'on parvient en multipliant le numérateur et le dénominateur par

$$3\sqrt{r} - 4\sqrt{\rho'},$$

j'ai d'abord, par la formule (197),

$$z_{,} < 0{,}81634 - \sqrt{-0{,}45265} - \sqrt{0{,}06993 - \sqrt{-0{,}7413}};$$

or le grand radical étant de la forme

$$\sqrt{a - \sqrt{-b}},$$

aura sa partie imaginaire d'un signe contraire à $\sqrt{\rho'}$; la première racine imaginaire n'appar-

tient donc pas à la première branche, c'est donc $\sqrt{R'}$ qu'il faut prendre, dans lequel le radical intérieur est positif; en le décomposant j'ai

$$z_2 \| 0,81634 + \sqrt{0,466335 - \sqrt{-0,45265} - \sqrt{-0,396335}};$$

enfin

$$z_2 \| 1,49922 - 1,3023\sqrt{-1},$$

et

$$z_3 \| 1,49922 + 1,3023\sqrt{-1}.$$

Pour avoir les deux autres racines, en supposant que je n'aie pas d'autre moyen de les avoir, ou en supposant que $\sqrt{\rho'}$ est aussi imaginaire, je recompose ces deux équations, et j'ai

$$z^2 + 2,99844\,z + 3,722.$$

Cette équation est de la forme

$$z^2 + 2mz + m^2 + n^2 = 0;$$

je forme l'autre de cette manière :

$$z^2 + (a - 2m)z + \frac{d}{m^2 + n^2},$$

qui devient

$$z^2 + 1,8996\,z + 0,442,$$

qui donnent les deux quasi-valeurs réelles

$$z_1 \| 0,5063$$
$$z_4 \| 1,3917.$$

J'ai maintenant deux limites pour z_1, savoir,

la partie réelle de la première branche, qui donne

$$z_{\iota} \parallel 0{,}133\,;$$

comme elle est plus petite que la première, je les compense d'abord, j'ai

$$z \parallel,\ 0{,}339\,;$$

et en concentrant, j'ai

$$\xi = 0{,}3.$$
$$k\ \ \xi = 0{,}2383.$$
$$k'\ \xi = 0{,}2272.$$
$$k''\ \xi = 0{,}225094.$$

La concentration est décroissante en joignant le dernier terme à ϖ; on a

$$x = -\ 1{,}000582,$$

pour $x = -1$.

On aurait pu s'assurer que la première racine est réelle, en concentrant $\Delta\varpi = 0$; on a

$$k\ \ \Delta\varpi = \frac{d}{c} = 0{,}1852.$$
$$k'\ \Delta\varpi\ldots\ldots = 0{,}2174.$$
$$k''\ \Delta\varpi\ldots\ldots = 0{,}2234.$$
$$k'''\Delta\varpi\ldots\ldots = 0{,}22458.$$

En réunissant cette dernière à ϖ, on a

$$x = -\ 0{,}99997.$$

On a ici une valeur trop petite pour x, parce que la concentration est croissante. La partie

réelle de $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r}$ est encore une limite qui conduit à la valeur.

Lorsque $\sqrt{r}$ est imaginaire, si l'on voulait prendre le chemin le plus long pour trouver les racines réelles de l'équation, il faudrait suivre la marche que l'on vient d'indiquer, en décomposant successivement $\sqrt{\rho}$ et $\sqrt{R}$, on formerait ensuite deux équations du deuxième degré, dont on concentrerait les quasi-valeurs, et qui pourraient toujours se concentrer quand il y a des racines réelles.

En suivant cette marche on ne peut résoudre l'équation qu'en la recomposant en facteurs du deuxième degré. Le calcul des inéquations, en les décomposant de cette manière immédiatement, dispense de tout ce travail. Ainsi la décomposition en facteurs du deuxième degré, appartient aux équations dont les racines sont imaginaires. Le calcul des inéquations parvient toujours à les décomposer en facteurs réels, comme on le verra. Je passe maintenant au cinquième degré.

CHAPITRE V.

De la résolution des équations du cinquième degré.

203. Dans la résolution des équations du cinquième degré et des suivans, on suit la même marche que celle qui a été développée dans la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. La théorie se trouve maintenant expliquée; il ne s'agit plus que de construire les formules auxquelles on doit aboutir.

PREMIÈRE SECTION.

Premier mode de solution, ou mode de solution simple.

De la résolution des valeurs de p, ou première méthode de solution simple.

Soit donc l'équation générale du cinquième degré

$$x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0,$$

dont je suppose, comme ci-dessus, tous les coëfficiens positifs, et par conséquent toutes les racines négatives; je la décompose en deux facteurs

$$(x^4 + P x^3 + Q x^2 + R x + S)(x + p) = 0.$$

En réformant l'équation avec ces deux facteurs, et comparant ses coëfficiens avec ceux de la proposée, on a les cinq équations auxiliaires

$$1^{re}\ A = P + p,$$
$$2^{e}\ B = Q + Pp,$$
$$3^{e}\ C = R + Qp,$$
$$4^{e}\ D = S + Rp,$$
$$5^{e}\ E = Sp.$$

Maintenant l'équation indéterminée du quatrième degré contient l'inéquation originelle

$$Q < \tfrac{3}{8} P^2;$$

avec cette inéquation et l'équation auxiliaire

$$Q = B - Pp,$$

je forme, comme ci-dessus, une inéquation du deuxième degré, qui me donne les quatre quasi-valeurs originelles suivantes :

204. $P < \frac{4}{5}(A + \sqrt{A^2 - \frac{5}{2}B}) \ldots\ldots = < \Pi.$

$$p_1 > \tfrac{1}{5}(A - 4\sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B}) \ldots\ldots = > \varpi.$$
$$P > \tfrac{4}{5}(A - \sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B}) \ldots\ldots = > \Phi.$$
$$p_5 < \tfrac{1}{5}(A + 4\sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B}) \ldots\ldots = < \varphi.$$

Pour compléter maintenant les quasi-valeurs de ϖ et de φ, je compare l'équation

$$Q = B - Pp$$

avec l'inéquation

$$Q \parallel B - \Pi\,\varpi,$$

en substituant les valeurs

$$Q \parallel \tfrac{1}{25}[25\,B - 4(A+\sqrt{r})(A-4\sqrt{r})]$$
$$Q \parallel \tfrac{6}{25}(A+\sqrt{r})^2,$$

d'où j'arrive à

$$Q < \tfrac{3}{8}\Pi^2,$$

et par conséquent

$$Q < B - \Pi\varpi.$$

On pourrait conclure la même chose par le raisonnement qu'on a fait ci-dessus (61). En vertu du même raisonnement, on a

$$Q > B - \Phi\varphi,$$

quand $\Phi > \varphi$.

J'appelle K cette quasi-valeur de Q; et en comparant l'équation

$$R = C - Qp$$

avec l'expression $C - K\varpi$, j'aurai par le même raisonnement

$$R < C - K\varpi;$$

d'où je conclurai d'après l'équation (4),

$$S = D - Rp,$$
$$S < D - (C - K\varpi)\varpi.$$

Enfin l'équation auxiliaire (5), $E = Sp$, me donnera, en substituant la valeur de K,

205. $$p_1 > \frac{E}{D - [C - (B - \Pi\varpi)\varpi]\varpi}.$$

Cette quasi-valeur complète sert de formule

de concentration; il faut remarquer encore que pour obtenir cette quasi-valeur complète, j'ai opéré sur l'équation en allant de gauche à droite.

On aura aussi pour la quasi-valeur complète de φ, quand $\Phi > \varphi$,

$$p_5 < \frac{E}{D-[C-(B-\Phi\varphi)\varphi]\varphi};$$

et en mettant à la place de Π et Φ leur valeur, on a

$$206.\ p_1 > \frac{E}{\varpi^4 - A\varpi^3 + B\varpi^2 - C\varpi + D},$$

$$p_5 < \frac{E}{\varphi^4 - A\varphi^3 + B\varphi^2 - C\varphi + D}.$$

On voit clairement quelle est la loi pour tous les autres degrés.

Quant à la concentration, la théorie développée dans le troisième et le quatrième degré s'étend à tous les suivans; et quand ϖ appartient à une racine réelle, on a la série de concentration

$$\underset{p_1}{\varpi} < \underset{p_1}{k\varpi} < \underset{p_1}{k'\varpi} < \underset{p_1}{k''\varpi}, \text{ etc.};$$

dont tous les signes changent de direction, et qui se convertit en une série de concentration opposée, lorsque l'on donne à ϖ une valeur

qui dépasse la première racine et qui n'atteint pas la seconde, quand la première racine est réelle.

Il en est de même pour ϕ, pourvu que $\Phi > \phi$; il en est de même encore pour la troisième racine; et en général, comme on l'a déjà vu, toutes les racines impaires d'une équation sont susceptibles d'une double concentration opposée, pourvu que les racines soient toutes du même signe, et pourvu que la somme de toutes les autres racines soit plus grande que celle que l'on concentre, ce qui n'a lieu, sans exception, que pour la première quasi-valeur ϖ.

De la résolution des valeurs de x, *ou deuxième méthode de solution simple.*

207. Pour y parvenir il faut commencer par déterminer les quasi-valeurs de P, Q, R, S, de l'équation indéterminée; dans ce cas, je commence par l'autre extrémité de l'équation, et je ne m'occupe que des quasi-valeurs en ϕ.

D'abord

$$\text{de } p = \frac{E}{S} \text{ et de } p < \phi,$$

j'ai la quasi-valeur

$$S > \frac{E}{\phi},$$

j'ai par la même raison

$$S < \frac{E}{\varpi};$$

puis de

$$S = \frac{E}{p},$$

$$S = D - Rp,$$

j'ai

$$p^2 - \frac{Dp}{R} + \frac{E}{R} = 0;$$

d'où j'ai

$$p = \frac{D}{2R} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - \frac{E}{R}};$$

puis avec

$$p < \varphi,$$

j'ai l'inéquation

$$\varphi - \frac{D}{2R} > \pm \sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - \frac{E}{R}}.$$

En élevant au quarré pour faire disparaître le radical, j'ai, tout calcul fait, la quasi-valeur

$$R > \frac{D\varphi - E}{\varphi^2},$$

j'aurais eu de même

$$R < \frac{D\varpi - E}{\varpi^2}.$$

Pour avoir la quasi-valeur de Q, on prend

d'abord la valeur de p avec les deux valeurs

$$R = D - \frac{S}{p}$$

$$R = C - Qp,$$

comme on vient de le faire; puis avec l'inéquation $p < \varphi$, on obtient d'abord l'inéquation

$$S < Q\varphi^2 - C\varphi + D;$$

puis avec l'inéquation contraire

$$S > \frac{E}{\varphi},$$

on a enfin

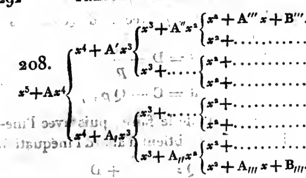
$$Q \vee \frac{C\varphi^2 - D\varphi + E}{\varphi^3},$$

on aurait de même

$$Q < \frac{C\varpi^2 - D\varpi + E}{\varpi^3}.$$

Avec ces quasi-valeurs je forme deux inéquations du quatrième degré, l'une en φ, l'autre en ϖ; je décompose ensuite chacune de ces deux en deux autres du troisième degré, puis chacune de celles-ci en deux du deuxième, par la ramification suivante :

208.



Et le tableau suivant présente la marche des opérations à suivre pour déterminer les coëfficiens de ces différentes équations.

209.

$\sqrt{A^2-\frac{5}{2}B}\ldots=\sqrt{r}$	$\sqrt{A'^2-\frac{8}{3}B'}.=\sqrt{r_4}$	$\sqrt{A''^2-3B''}=\sqrt{r_3}.$
$\frac{1}{5}(A-\sqrt{r})\ldots=\Phi=A'$	$\frac{1}{4}(A'-\sqrt{r_4}.=\Phi'=A''$	$\frac{1}{3}(A-\sqrt{r_3}=\Phi''=A'''.$
$\frac{1}{5}(A+4\sqrt{r})\ldots=\varphi$	$\frac{1}{4}(A'+3\sqrt{r_4}=\varphi'$	$\frac{1}{3}(A+2\sqrt{r_3}=\varphi''.$
$\frac{C\varphi^2-D\varphi+E}{\varphi^3}\ldots\ldots=B'$	$\frac{C'\varphi'-D'}{\varphi'^2}\ldots\ldots\ldots=B''$	$\frac{C''}{\varphi''}\ldots\ldots\ldots\ldots=B'''.$
$\frac{D\varphi-E}{\varphi^2}\ldots\ldots\ldots\ldots=C'$	$\frac{D'}{\varphi'}\ldots\ldots\ldots\ldots=C''$	
$\frac{E}{\varphi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=D'$		

Puis

$$\sqrt{A'''^2-4B'''}=\sqrt{r'_2},$$

enfin

$$x_1 = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\Phi''-\sqrt{\Phi''^2-\frac{C''}{\varphi''}}\right), \\ \text{ou } \frac{1}{2}\left(A'''-\sqrt{A'''^2-4B'''}\right). \end{array}\right.$$

On voit manifestement la loi de la suite des

opérations à faire; j'ai employé la notation

$$\sqrt{r_4},\ \sqrt{r_3},\ \sqrt{r_2},$$

pour marquer à quel degré appartient chaque radical, et la virgule désigne qu'il appartient à la branche réductible.

A l'aide de ce tableau on a la formule suivante

210. $$x_1 - \| \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5}A \ldots\ldots \\ -\frac{1}{5}\sqrt{A^2-\frac{5}{2}B} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{A'^2-\frac{8}{3}B'} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{A''^2-3B''} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{A'''^2-4B'''} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \ldots = \frac{1}{5}A \\ \ldots = -\frac{1}{5}\sqrt{r} \end{array}\right\} = \frac{1}{4}A' \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{4}\sqrt{r_4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} = \frac{1}{3}A'' \ldots \\ = -\frac{1}{3}\sqrt{r_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} = \frac{1}{2}A'''. \\ = -\frac{1}{2}\sqrt{r_2}. \end{array}$$

| 1re colonne. | 2e | 3e | 4e | 5e

Cette deuxième formule présente, en raccourci, le tableau des différentes opérations qu'on effectue dans la première, de sorte que ces deux formules n'en font qu'une.

On voit que dans cette dernière, la première colonne contient la partie rationnelle $\frac{1}{5}A$, avec la suite des radicaux originels des inéquations successivement abaissées, jusqu'à celle du deuxième degré. Les colonnes intermédiaires déterminent seulement les valeurs de A', A'', etc.; les valeurs de B', B'', etc. sont prises dans le tableau précédent ou dans la première partie de cette double formule. On voit comment

elles sont fonctions des différens coëfficiens de la proposée.

Cette formule est telle, qu'elle sert en même temps pour les degrés inférieurs. La dernière colonne toute seule exprime la formule de la résolution des équations du deuxième degré; la quatrième et la cinquième expriment la formule de solution pour les équations du troisième degré, et ainsi de suite.

Il s'agit de confirmer cette formule par un exemple; je prends l'équation

$$x^5 + 15\,x^4 + 85\,x^3 + 225\,x^2 + 274\,x + 120 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\,(x+4)\,(x+5) = 0,$$

j'ai

$A' = 5 = 9{,}1716$	$A'' = \Phi' = 6{,}1039$	$A''' = \Phi'' = 3{,}7233$
$\ldots\ldots \varphi = 5{,}8284$	$\ldots\ldots \varphi' = 3{,}0677$	$\ldots\ldots \varphi'' = 2{,}4806$
$B' \ldots\ldots = 31{,}144$	$B'' \ldots\ldots = 11{,}996$	$B''' \ldots\ldots = 2{,}7779$
$C' \ldots\ldots = 43{,}479$	$C'' \ldots\ldots = 6{,}711$	Enfin
$D' \ldots\ldots = 20{,}5888$		$x_1 - < 1{,}0323.$

En concentrant une seule fois cette quasi-valeur, je fais

$$\chi = 1{,}03,$$

j'ai

$$k\chi = 1{,}0126.$$

Je ne m'étendrai pas davantage; on voit que les résultats sont absolument les mêmes que

ceux des autres degrés, ou, par conséquent, que cette méthode s'applique aux équations de tous les degrés. Dans ce premier mode, la concentration ne peut s'effectuer que quand les racines sont toutes du même signe : le deuxième mode de solution leur donne, comme on l'a vu, cette propriété.

DEUXIÈME SECTION.

Deuxième mode de solution, ou mode de solution double.

211. Je reprends les deux équations

$$x = -(\varpi + z),$$
$$x = -(\varphi - z');$$

et en substituant ces valeurs dans la proposée, j'ai

$$\left.\begin{matrix} z^5 + 5\varpi \\ -A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z^4 + 10\varpi^2 \\ -4A\varpi \\ +B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z^3 + 10\varpi^3 \\ -6A\varpi^2 \\ +3B\varpi \\ -C \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z^2 + 5\varpi^4 \\ -4A\varpi^3 \\ +3B\varpi^2 \\ -2C\varpi \\ +D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z + \varpi^5 \\ -A\varpi^4 \\ +B\varpi^3 \\ -C\varpi^2 \\ +D\varpi \\ -E \end{matrix}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} z'^5 - 5\varphi \\ +A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z'^4 + 10\varphi^2 \\ -4A\varphi \\ +B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z'^3 - 10\varphi^3 \\ +6A\varphi^2 \\ -3B\varphi \\ +C \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z'^2 + 5\varphi^4 \\ -4A\varphi^3 \\ +3B\varphi^2 \\ -2C\varphi \\ +D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z' - \varphi 5 \\ +A\varphi^4 \\ -B\varphi^3 \\ +C\varphi^2 \\ -D\varphi \\ +E \end{matrix}\right\} = 0,$$

ou pour ϖ,

$$z^5 - a z^4 + b z^3 - c z^2 + d z - e = 0,$$

ou pour φ,

$$z'^5 - a z'^4 + b z'^3 - \gamma z'^2 + \delta z' - \varepsilon = 0.$$

En déterminant ces coëfficiens en valeurs de coëfficiens de la proposée, j'ai

212.

$$a = 4\sqrt{r}$$

$$b = 6r.$$

$$c = \frac{1}{5^2}[2.4.13r\sqrt{r} - 2(-2A^3 + \tfrac{15}{2}AB - \tfrac{25}{2}C)].$$

$$= \frac{1}{5^2}[2.4.13r\sqrt{r} - 2(-3A(A^2 - \tfrac{5}{2}B) + (A^3 - \tfrac{25}{2}C).$$

$$= \frac{1}{5^2}(2.4.13r\sqrt{r} - 2S_5C).$$

$$\gamma = \frac{1}{5^2}(2.4.13r\sqrt{r} + 2S_5C).$$

$$d = \frac{1}{5^3}[(-3A^4 + 15A^2 - B50AC + 5^3D) + 160r^2 - 16(-2A^3 + \tfrac{15}{2}AB - 25C)\sqrt{r}.$$

$$= \frac{1}{5^3}[-6A^2(A^2 - \tfrac{5}{2}B) + 4A(A^3 - \tfrac{25}{2}C) + 160r^2 - 16S_5C\sqrt{r}.$$

$$= \frac{1}{5^3}(S_5D + 160r^2 - 16S_5C\sqrt{r}).$$

$$\delta = \frac{1}{5^3}(S_5D + 160r^2 + 16S_5C\sqrt{r}).$$

$$e = \frac{1}{5^5}\begin{cases} -(-4A^5 + 5^2A^3B - 5^3A^2C + 5^4AD - 5^5E). \\ +[20(-3A^4 + 15A^2B - 50C + 5^3D) + 2.3.4^3r^2]\sqrt{r}. \\ -160(-2A^3 + 15AB - 25C)r. \end{cases}$$

$$= \frac{1}{5^5}\begin{cases} -(-10A^3(A^2 - \tfrac{5}{2}B) + 10A^2(A^3 - \tfrac{25}{2}C) - 5A(A^4 - 5^3D) + (A^5 - 5^5E) \\ +(20S_5D + 2.3.4^3r^2)\sqrt{r}. \\ -160S_5Cr. \end{cases}$$

$$= \frac{1}{5^5}[-SE + (20S_5D + 2.34^3r^2)\sqrt{r} - 160S_5Cr].$$

$$\varepsilon = \frac{1}{5^5}[+SE + (20S_5D + 2.3.4^3r^2)\sqrt{r} + 160S_5Cr].$$

On peut remarquer maintenant que les valeurs de $\mathcal{S}_5$ C, $\mathcal{S}_5$ D, $\mathcal{S}$E, sont composées, en dernière analyse, des relations de A successivement avec tous les autres coëfficiens, qui sont telles qu'elles seraient séparément = o, si toutes les racines étaient égales, comme on peut le vérifier dans chacune des expressions. On peut encore remarquer la loi des coëfficiens de ces relations; leur signe est d'abord alternativement négatif et positif, ensuite leur valeur est celle des coëfficiens des différentes puissances du binôme

$$(x + a)^m,$$

en commençant par le troisième terme de chaque puissance. Ainsi on a d'abord

$$\mathcal{S}_5 C = -3A\left(A^2 - \tfrac{5}{2}B\right) + \left(A^3 - \tfrac{25}{2}C\right);$$

les coëfficiens de ces deux relations, qui sont 3 et 1, sont ceux du troisième et du quatrième terme de

$$(x + a)^3.$$

De même dans

$$\mathcal{S}_5 D = -6A^2\left(A^2 - \tfrac{5}{2}B\right) + 4A\left(A^3 - \tfrac{25}{2}C\right) + \left(A^4 - 5^3 D\right),$$

les coëfficiens 6, 4, 1, sout ceux du troisième, quatrième et cinquième terme du binôme

$$(x + a)^4.$$

Enfin dans $\mathcal{S}$E on a

$$\mathcal{S}E = -10A^3\left(A^2 - \tfrac{5}{2}B\right) + 10\left(A^3 + \tfrac{25}{2}C\right) - 5A\left(A^4 - 5^3 D + \left(A^5 - 5^4 E\right)\right);$$

les coëfficiens 10, 10, 5, 1, sont ceux du troisième, quatrième, cinquième et sixième terme du binôme

$$(x + a)^5.$$

En général ces coëfficiens sont les mêmes que ceux de $(x+a)$ élevé à une puissance qui fait une dimension égale à celle du coëfficient qui est en relation avec A. Ainsi SC qui est de trois dimensions a les coëfficiens de la troisième puissance de $x+a$, et ainsi de suite.

On peut observer que la même loi a lieu pour les relations des coëfficiens dans les formules du quatrième et du troisième degré.

En reprenant donc les valeurs de ces coëfficiens, on a l'équation double en z, qu'on peut appeler l'équation double aux différences simples, et que j'exprime ainsi :

213. $z^5.$

$$-z^4 \times 4\sqrt{r}.$$

$$+z^3 \times 2.3(r).$$

$$-z^2 \times \frac{1}{25}(8.13r\sqrt{r} \mp 2S_5\mathrm{C}).$$

$$+z \times \frac{1}{5^3}(S_5\mathrm{D} + 160r^2 \mp 16S_5\mathrm{C}\sqrt{r}).$$

$$-1 \times \frac{1}{5^5}(\mp S\mathrm{E} + (20S_5\mathrm{D} + 2.34^3r^2)\sqrt{r} \mp 160S_5\mathrm{C}r).$$

Tous ces coëfficiens, ainsi disposés à la droite

de z, doivent être positifs quand toutes les racines sont réelles. J'exprimerai aussi cette équation généralement par

$$z^5 - az^4 + bz^3 - cz^2 + dz - e = o;$$

chaque lettre a alors une valeur double, excepté les deux premières a et b.

On résoudra ensuite cette équation par la formule ci-dessus. Je ne m'étendrai pas sur ce qui concerne les racines imaginaires, je ne ferais que répéter ce que j'ai déjà dit ci-dessus. Quand les deux limites sont imaginaires, la résolution de l'équation appartient au mode de décomposition en facteurs du deuxième degré.

CHAPITRE VI.

De la résolution des équations du degré n.

214. D'APRÈS les loix que suivent les fonctions de coëfficiens, dans les différentes formules qu'on a développées, on voit que l'on peut parvenir à des formules générales qui conviennent à un degré quelconque N. Pour cela je prends la formule du binôme $(x+a)^n$. En faisant $= o$, le développement de cette formule, on a l'équation générale aux racines toutes égales, qu'on peut appeler *l'équation de niveau.* On a déjà vu comment les diffé-

rentes relations de coëfficiens se rapportaient à ce niveau ; je le compare donc avec l'équation générale du degré n, j'ai donc

$$x^n + nax^{n-1} + \frac{n.n-1.}{2}a^2x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}a^3x^{n-3} + \frac{n..n-3}{2.3.4}a^4x^{n-4}.....+a^n=0,$$

$$x^n + Ax^{n-1} \quad + Bx^{n-2} \quad + Cx^{n-3} \quad + Dx^{n-4}.....+N=0;$$

j'ai d'abord

$$A = ma,\ B = \frac{n.n-1}{2}a^2;$$

en faisant disparaître a, j'ai cette première équation :

215. $$A^2 - \frac{2mB}{n-1} = 0.$$

Cette première relation suffit pour développer la formule générale des quasi-valeurs de x, dans le premier mode de solution, car on a d'abord

216. $$\sqrt{r} = \sqrt{A^2 - \frac{2mB}{m-1}}.$$

$$\Pi = \frac{n-1}{n}(A + \sqrt{r}).$$

$$\varpi = \frac{1}{n}(A - (n-1)\sqrt{r}).$$

$$\Phi = \frac{n-1}{n}(A - \sqrt{r}).$$

$$\varphi = \frac{1}{n}(A + (n-1)\sqrt{r}).$$

On a ensuite pour la quasi-valeur complète de p et pour la formule générale de concentration :

$$p_{,} > \frac{N}{x^{n-1} - A x^{n-2} + B x^{n-3} \ldots\ldots + L x - M}$$

ou

$$p_{,} > \frac{N}{M - [L - [J - [H - \ldots\ldots - (B - n x) x] x] x] x}.$$

217. Maintenant pour avoir la valeur de $x_{,}$ le tableau ci-joint développe la marche des opérations à faire. La partie n°. 1 développe la ramification de l'équation, et son abaissement jusqu'au deuxième degré ; la partie n°. 2 exprime la marche des opérations pour déterminer les coëfficiens A', B', etc., M'', B'', etc. des coëfficiens des différentes équations abaissées ; enfin la partie n°. 3 est le tableau en raccourci de ces mêmes opérations. Pour démontrer cette dernière formule il suffit de remarquer que d'après le n°. 2, l'on a

$$\frac{n-1}{n}(A - \sqrt{r}) = A',$$

d'où

$$\frac{1}{n-1} A' = \frac{1}{n}(A - \sqrt{r});$$

puis

$$\frac{n-2}{n-1}(A' - \sqrt{r_{n-1}}) = A'',$$

d'où

$$\frac{1}{n-2}A'' = \frac{1}{n-1}(A' - \sqrt{r_{n-2}});$$

et ainsi de suite. En employant cette dernière formule, on détermine les valeurs de B', B'', etc.

218. Je passe maintenant au mode de solution double, pour former la double équation générale en z, je compare encore l'équation proposée avec l'équation générale aux racines égales

$$x^n + nax^{n-1} + \text{, etc.} = 0,$$

et je prends successivement les relations de A avec les autres coëfficiens, comme j'ai fait pour B, avec les équations

$$A = na \text{ et } C = \frac{n.n-1.n-2}{2.3}a^3;$$

je fais disparaître a, et j'ai

$$A^3 - \frac{2.3n^2C}{n-1.n-2} = 0.$$

En opérant ainsi de même pour tous les autres, j'ai cette suite de relations :

$$A^2 - \frac{2nB}{n-1} = 0.$$

$$A^3 - \frac{2.3n^2}{n-1\ n-2}C = 0.$$

$$A^4 - \frac{2.3.4 n^3}{n-1.n-2.n-3} D = o.$$

....

....

$$A^{n-2} - \frac{2.3.....n-2.n^{n-3}}{n-1.n-2.....n-(n-3)} L = o.$$

$$A^{n-1} - \frac{2.3.....n-1.n^{n-2}}{n-1.n-2.....n-(n-2)} M = o.$$

$$A^n - \frac{2.3.....n.n^{n-1}}{n-1.n-2....1} N = o.$$

Toutes ces relations n'ont de valeur que quand les racines sont inégales, et ces valeurs sont les élémens premiers qui constituent les différentes formules de solution.

219. On peut remarquer encore que quand toutes les racines sont réelles et de même signe, ces valeurs sont toutes positives ; c'est-à-dire que les seconds termes de ces binômes sont au-dessous des premiers quand ces valeurs sont négatives, ou quand les seconds termes surpassent les premiers, elles constituent des fonctions imaginaires. On voit clairement ici comment l'équation du binôme est l'équation de niveau relativement à toutes les autres équations composées. Ainsi tout coëfficient dont la valeur trop grande forme avec A une relation négative, cette valeur constitue une inégalité ima-

ginaire. Cette loi ne s'apperçoit pas quand les racines sont de différens signes; mais elle n'y est pas moins contenue, car toute équation peut être transformée en une autre dont toutes les racines ont le même signe, et alors cette loi se manifestera.

Avec ces relations simples, je forme la série suivante :

220.

Formule pour les relations des coëfficiens.

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{n.n-1}{2}A^{n-2}\left(A^2-\frac{2nB}{n-1}\right)+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}A^{n-3}\left(A^3-\frac{2.3n^2C}{n-1.n-}\right. \\ -\frac{n.n-1.\ldots.n-3}{2.3.4}A^{n-4}\left(A^4-\frac{2.3.4n^3D}{n-1.n-2.n-3}\right) \\ +\frac{n.n-1.\ldots.n-4}{2.3.4}A^{n-5}\left(A^5-\frac{2.3.4m^4E}{n-1.\ldots.n-4}\right) \\ -\text{etc.} \end{array}\right.$$

et avec cette série je constitue toutes les relations des coëfficiens SC, SD, SE, etc., car j'ai, pour le troisième degré,

$$SC\left\{\begin{array}{l} =-3A(A^2-3B)+A^3-27C, \\ =-2A^3+3^2AB-3^3C; \end{array}\right.$$

Quatrième degré,

$$SD\left\{\begin{array}{l} =-6A^2(A^2-\frac{8}{3}B)+4A(A^3-16C)-(A^4-4^4D), \\ =-3A^4+4^2A^2B-4^3AC+4^4D; \end{array}\right.$$

Cinquième degré,

$$SE\left\{\begin{array}{l} =-10A^3(A^2-\frac{5}{2}B)+10A^2(A^3-\frac{25}{2}C)-5A(A^4-5^3D)+(A^5-5^5 \\ =-4A^5+5^2A^3B+5^3A^2C+5^4AD-5^5E. \end{array}\right.$$

On peut conclure de là que l'on a générale-

ment pour la dernière relation des coëfficiens jusqu'au dernier terme N de l'équation n.

221. $\mathcal{S}N = -(n-1)A^n + n^2 A^{n-2}B - n^3 A^{n-3}C + n^4 A^{n-4}D \ldots - n^{m-1}AM + n^m N.$

Il faut observer qu'il n'est question ici que de la relation de tous les coëfficiens propre à chaque équation, et que j'ai exprimée par $\mathcal{S}C$, $\mathcal{S}D$, $\mathcal{S}E$, sans désigner, par un chiffre, le degré auquel ils appartiennent, parce que la lettre seule, qui est toujours la dernière, le désigne.

222. Mais il est question maintenant de déterminer la relation partielle des coëfficiens contenus dans un degré supérieur ; ainsi quand on a développé les valeurs des coëfficiens de l'équation en z, on a eu, pour le quatrième degré, une relation des trois premiers coëfficiens $\mathcal{S}_4C$, et pour le cinquième on a eu les deux relations partielles $\mathcal{S}_5D$ et $\mathcal{S}_5C$; mais, pour les déterminer généralement, j'observe que, par exemple, quand on a développé les coëfficiens de l'équation en z, pour le cinquième degré, on a obtenu $\mathcal{S}_5D$ en développant le coëfficient de z dans l'avant-dernière colonne

$$5\varpi^4 - 4A\varpi^3 + 3B\varpi^2 - 2C\varpi + D,$$

où la plus grande puissance de ϖ n'est que la

quatrième, et dans la colonne précédente, où l'on a obtenu S_5C, la plus haute puissance de x n'est que la troisième. On doit donc conclure de-là qu'en mettant $n-1$ à la place de n, dans les coëfficiens seulement de la formule générale ci-dessus (313), on obtiendra la relation des coëfficiens jusqu'à l'avant-dernière lettre pour le degré; c'est-à-dire qu'on obtiendra la relation S_nM, et qu'en substituant $n-2$ à la place de n, dans la même formule, on obtiendra la relation S_nL, et ainsi de suite. Effectivement en opérant ainsi, l'on a

223. Pour le quatrième degré,

$$S_4C\begin{cases}=-3A(A^2-\frac{8}{3}B)+A^3-16C,\\ =-2A^3+18AB-16C;\end{cases}$$

Pour le cinquième degré,

$$S_5C\begin{cases}=-3A(A^2-\frac{5}{2}B)+A^3-\frac{25}{2}C,\\ =-2A^3+\frac{25}{2}AB-\frac{25}{2}C;\end{cases}$$

$$S_5D\begin{cases}=-6A^2(A^2-\frac{5}{2}B)+4A(A^2-\frac{25}{2}C)-(A^4-5^3D),\\ =-3A^4+15A^2B-50AC+5^3D;\end{cases}$$

comme on l'a obtenu ci-dessus. On voit que généralement le premier terme qui ne renferme que la lettre A, a son coëfficient toujours plus petit d'une unité que son exposant. On peut d'après ceci déterminer généralement les relations partielles des coëfficiens; on a donc, en commençant par la dernière lettre,

224.

$$SN=\left\{\begin{array}{l} -(n-1)A^{n} \\ +n^{2}A^{n-2}B \\ -n^{3}A^{n-3}C \\ +n^{4}A^{n-4}D \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ -n^{n-1}AM \\ +n^{n}N \end{array}\right. \quad S_nM=\left\{\begin{array}{l} -(n-2)A^{n-1} \\ +n.n-2A^{n-3}B \\ -n^{2}.n-3A^{n-4}C \\ +n^{3}.n-4A^{n-5}D \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ +n^{n-2}2AL \\ -n^{n-1}M \end{array}\right. \quad S_nL=\left\{\begin{array}{l} -(n-3)A^{n-2}. \\ +\dfrac{n.n-2.n-3}{n-1}A^{n-4}B. \\ -\dfrac{n^{2}.n-3.n-4}{n-1}A^{n-5}C. \\ +\dfrac{n^{3}.n-4.n-5}{n-1}A^{n-6}D. \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ -\dfrac{n^{n-3}.2.3}{n-1}AJ, \\ +\dfrac{n^{n-2}}{n-1}L. \end{array}\right.$$

$$S_nJ=\left\{\begin{array}{l} -(n-4)A^{n-3} \\ +\dfrac{n.n-3.n-4}{n-1}A^{n-5}B \\ -\dfrac{n^{2}.n-3.n-4.n-5}{n-1.n-2}A^{n-6}C \\ +\dfrac{n^{3}.n-4.n-5.n-6}{n-1.n-2}A^{n-7}D \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{n^{n-4}4.3.2}{n-1.n-2}AH \\ -\dfrac{n^{n-3}.3.2.1}{n-1.n-2}J \end{array}\right. \quad S_nH=\left\{\begin{array}{l} -(n-5)A^{n-4}. \\ +\dfrac{n.n-4.n-5}{n-1}A^{n-6}B. \\ -\dfrac{n^{2}.n-4.n-5.n-6}{n-1.n-2}A^{n-7}C. \\ +\dfrac{n^{3}.n-4\ldots n-7}{n-1.n-2.n-3}A^{n-8}D. \\ -\dfrac{n^{4}.n-5\ldots n-8}{n-1.n-2.n-3}A^{n-9}F. \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ -\dfrac{n^{n-5}5.4.3.2}{n-1.n-2.n-3}AG. \\ +\dfrac{n^{n-4}.4.3.2.1}{n-1.n-2.n-3}H \text{ etc.} \end{array}\right.$$

Maintenant pour avoir l'expression générale de la double équation en z, j'ai d'abord, en ne prenant que pour ϖ,

225. $$0 = \left.\begin{array}{r} z^m + n\varpi \\ -A \end{array}\right\} z^{n-1} + \left.\begin{array}{r} \frac{n.n-1}{2}\varpi^2 \\ -(n-1)A\varpi \\ +B \end{array}\right\} z^{n-2} + \left.\begin{array}{r} \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\varpi^3 \\ -\frac{n-1.n-2}{2}A\varpi^2 \\ +n-2.B\varpi \\ -C \end{array}\right\} z^{n-3} + \begin{array}{l} \frac{n.n-1\ldots1}{1.2.3\ldots1}\varpi^n. \\ -\frac{n-1.n-2\ldots1}{1.2\ldots n-1}A\varpi^{n-1} \\ +\frac{n-2.n-3\ldots1}{1.2\ldots n-2}B\varpi^{n-2}. \\ -\frac{n-3.n-4\ldots1}{1.2\ldots n-3}C\varpi^{n-3}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots -M\varpi. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots +N. \end{array}$$

On voit manifestement la loi pour la formation des coëfficiens de cette équation, ainsi que celle en ϖ; mais, pour les former l'une et l'autre, il faudrait faire un double travail. Il est donc avantageux de prendre une formule de coëfficiens qui puisse convenir, à la fois, à cette double équation, et qui soit en fonction de SC, SD, SE, etc., dont on connaît la formation, et qui expriment la nature des fonctions qui entrent dans la formule.

Pour prendre généralement cette formule, je commence par le dernier terme, ou la dernière colonne, et j'observe que les coëfficiens de tous ses termes sont égaux à l'unité. Ce dernier terme est donc le développement de

$$\varpi^m - A\varpi^{m-1} + B\varpi^{m-2} \text{ etc.}$$

Pour former le terme précédent j'observe que la formule du binôme a tous ses termes à

égale distance des deux extrêmes parfaitement égaux, qu'il est indifférent de la prendre dans un sens direct ou de la prendre à rebours ; que dans le premier sens on a $(x+a)^m$, et dans le deuxième $(a+x)^m$; par conséquent les coëfficiens du terme précédent seront :

$$n\varpi^{n-1} - (n-1)A\varpi^{n-2} + n-2B\varpi^{n-3} - (n-3)C\varpi^{n-3} \text{ etc.}$$

ceux de l'antépenultième seront :

$$\frac{n.n-1}{2}\varpi^{n-2} - \left(\frac{n-.n-2}{2}\right)A\varpi^{n-3} + \left(\frac{n-2.n-3}{2}\right)B\varpi^{n-4} \text{ etc.};$$

et ainsi de suite. En développant donc ces suites on a les coëfficiens n, m, l, tels qu'on les voit exprimés sur le troisième tableau, page 314.

Cette formule convient à la double équation en z, par le double signe $\mp$, qui affecte alternativement les termes, le signe supérieur appartient à l'équation du complément de ϖ, et le signe inférieurs à celle du complément de φ.

Mais il faut observer que la formule est faite d'après la supposition que le degré n est pair. Dans ce cas le dernier terme de l'équation en z et en z', exprimé en ϖ et en φ, savoir :

$$\left.\begin{matrix} z^n + n\varpi \\ -A \end{matrix}\right\} z^{n-1} \text{ etc. et } \left.\begin{matrix} z'^n - n\varpi \\ +A \end{matrix}\right\} z'^{n-1} \text{ etc.},$$

sont de la même forme ; on a, par exemple, pour le dernier terme du quatrième degré,

$$\varpi^4 - A\varpi^3 + B\varpi^2 - \text{etc.}$$
$$\varphi^4 - A\varphi^3 + B\varphi^2 - \text{etc.}$$

Dans le développement de ces deux quantités il n'y a que $\sqrt{r}$ qui ait un signe différent, par conséquent tous les termes qui n'affectent pas $\sqrt{r}$, doivent avoir le même signe dans l'une et dans l'autre; et ceux qui sont affectés de ce radical doivent être négatifs pour ϖ, et positifs pour φ : c'est ce qui a lieu dans la formule du tableau.

Au contraire, quand l'équation est d'un degré impair, les deux expressions en ϖ en φ ont tous leurs termes d'un signe contraire ; mais comme $\sqrt{r}$ est d'un signe différent dans ϖ et dans φ, il s'ensuit que les termes qui sont affectés de ce radical doivent avoir le même signe dans les expressions de ϖ et de φ ; et qu'au contraire, les autres termes doivent avoir un signe différent ; il faut remarquer, enfin, que le premier terme de chacune de ces deux expressions, pour le cinquième degré, par exemple, est immédiatement $+ SE$ pour ϖ, et $- SE$ pour φ; mais comme dans l'équation générale,

$$z^5 - az^4 + bz^3 \text{ etc.},$$

on a fait ressortir le signe négatif des coëfficiens alternatifs, on doit avoir pour ce premier terme $\mp SE$, et ainsi pour les autres degrés impairs.

226. Il s'agit de faire voir encore comment il faut employer cette formule pour les différens degrés, je l'applique d'abord au troisième degré; dans ce cas $n=3$, et comme C est alors le dernier coëfficient, on a

$$N=C,\ M=B,\ L=A;$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, le premier terme $\mathcal{S}N$ devient

$$=\mp \mathcal{S}C;$$

le deuxième,

$$\mp n.\mathcal{S}_n M(n-1)\sqrt{r},$$

qui devient

$$6\,\mathcal{S}_3 B\sqrt{r}=-6r\sqrt{r},$$

parce que

$$\mathcal{S}_3 B=-(A^2-3B)=-r;$$

le troisième terme

$$\frac{n.n-1}{2}\,\mathcal{S}_n L(n-1)^2 r,$$

qui devient

$$12\,\mathcal{S}_3 A=0,$$

parce que la fonction dont il est composé, savoir :

$$-(n-3)A^{n-2}+\frac{n.n-1.n-3}{2.3}A^{n-4}B \text{ etc.}$$

contient dans tous ses termes $n-3$, qui est

$= 0$; mais ce n'est pas à dire pour cela qu'il faut s'arrêter là : le terme suivant,

$$\mp \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \mathcal{S}_n \mathrm{J} (n-1)^3 r\sqrt{r},$$

qui devient

$$= 8.\mathcal{S}1.r\sqrt{r},$$

(car le premier coëfficient de l'équation $= 1$)

$$= 8\, r\sqrt{r},$$

parce que la fonction de $\mathcal{S}1$ ne consiste plus que dans le terme

$$-(n-4)\,\mathrm{A}^{n-5} = 1\,;$$

en récapitulant on a

$$\left.\begin{matrix} c \\ \gamma \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{27}(2\,r\sqrt{r} \mp \mathcal{S}\mathrm{C},$$

comme on l'a vu ci-dessus.

Pour avoir la valeur de b , j'ai, dans la deuxième ligne de la formule, le premier terme

$$\frac{1}{n^{n-2}} \mathcal{S}_n \mathrm{M} = \tfrac{1}{3} \mathcal{S}_3 \mathrm{B},$$

je le prends positivement tel qu'il est dans la formule, parce que les termes de cette ligne proviennent des fonctions de ϖ et de φ élevé à une puissance paire ; le deuxième terme qui contient $\mathcal{S}\mathrm{A}$ est $= 0$; le troisième terme qui contient $\mathcal{S}1$ est $= 1 \times 4\,r$,

d'où j'ai

$$b = \frac{1}{3}(4r + S_3 B) = \frac{1}{3}(4r - r) = r,$$

comme ci-dessus.

Pour avoir a, qui appartient à un degré impair, je reprends les signes additionnels contraires à ceux de la formule. Le premier terme de la troisième ligne

$$= \frac{1}{n^{n-3}} S_n L = S_3 A = 0;$$

il ne reste plus que le deuxième, qui, à cause de $S1 = 1$, donne $a = 2\sqrt{r}$, comme ci-dessus.

227. En récapitulant donc les règles à observer dans l'application de cette formule :

1°. Le double signe $\mp$ prend la place du signe $+$, et réciproquement pour tous les coëfficiens qui appartiennent à une puissance impaire de z;

2°. $S_n B = -r$;
3°. $S A = 0$;
4°. $S 1 = 1$.

Si j'applique cette formule au quatrième degré avec l'observation de ces quatre règles, j'ai

$$d = \frac{1}{4^4}(SD \mp 3.4 S_4 C\sqrt{r} - 54r^2 \mp 0 + 81r^2).$$

$$= \frac{1}{4^4}(SD + 27r^2 \mp 3.4 S_4 C\sqrt{r}).$$

$$c = \frac{1}{4^2}(\mp \mathcal{S}C - 9r\sqrt{r} \mp o + 27r\sqrt{r}.$$

$$= \frac{1}{4^2}(2.9r\sqrt{r} \mp \mathcal{S}C.$$

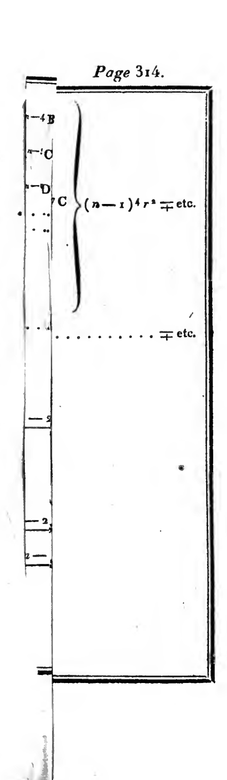
$$b = \frac{1}{4}(-r \mp o + 9r) = 2r.$$

$$a = o + 3r.$$

Ces différentes valeurs sont conformes à celles qu'on a obtenues ci-dessus.

En l'appliquant encore au cinquième degré on obtiendra également le même résultat que ci-dessus. Ainsi, à l'aide de cette formule, on peut immédiatement former la double équation en z, il suffit de calculer les relations $\mathcal{S}C$, $\mathcal{S}D$, $\mathcal{S}E$, etc., dont on connaît la loi.

On peut alors résoudre cette double équation par la formule générale exposée dans le tableau précédent, et l'on peut même, si l'on veut, se procurer une formule où tous les radicaux $\sqrt{r_n}$, $\sqrt{r_{n-1}}$, etc., et les valeurs A', A'', etc. soient exprimés immédiatement en fonctions des relations $\mathcal{S}C$, $\mathcal{S}D$, $\mathcal{S}E$, etc.


C
$(n-1)^4 r^2 \mp$ etc.
$\mp$ etc.

CHAPITRE VII.

De la décomposition des équations en facteurs réels du deuxième degré.

Ce dernier mode de solution est nécessaire pour décomposer en facteurs réels les équations qui ne contiennent que des racines imaginaires.

PREMIERE SECTION.

228. *De la résolution des équations du quatrième degré.*

Je décompose l'équation générale du quatrième degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

en deux facteurs

$$(x^2 + Px + Q)(x^2 + px + q) = 0;$$

en la recomposant, j'ai

$$\left.\begin{matrix} x^4 + Px^3 + Qx^2 \\ + px^3 + Ppx^2 + Qpx \\ + qx^2 + Pqx + Qq \end{matrix}\right\} = 0.$$

J'obtiens de-là quatre équations auxiliaires,

1...... $A = P + p$;

2...... $B = Pp + Q + q$;

3...... $C = Qp + Pq$;

4...... $D = Qq$.

J'ai de plus les deux inéquations pour le premier facteur,

$$Q < \tfrac{1}{4}P^2;$$

pour le deuxième,

$$q < \tfrac{1}{4}p^2.$$

D'abord avec l'équation

$$Q = B - Pp - q,$$

et l'inéquation

$$Q < \tfrac{1}{4}P^2,$$

j'obtiens

$$q > \frac{3P^2 - 4AP + 4B}{4};$$

puis avec l'inéquation

$$q < \tfrac{1}{4}p^2,$$

je parviens, en mettant pour p sa valeur

$$= A - P,$$

à cette inéquation du deuxième degré,

$$P^2 - 4AP + \frac{4B - A^2}{2} < 0,$$

qui donne

$$P < \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{3A^2 - 8B}),$$
$$P > \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{3A^2 - 8B}).$$

Pour avoir la quasi-valeur de p, je mets $A-p$ à la place de P, dans ces deux quasi-valeurs, et j'ai, pour la première,

$$p > \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{3A^2 - 8B});$$

pour la deuxième,

$$p < \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{3A^2 - 8B}).$$

Ces deux dernières quasi-valeurs sont les mêmes que les deux premières ; mais dans un ordre renversé, d'où l'on voit que les deux quasi-valeurs de P sont les deux quasi-valeurs de l'équation P et p.

229. J'aurai donc

$$P < \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{3A^2 - 8B}) = < \Pi,$$

et $$p > \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{3A^2 - 8B}) = > \pi.$$

On peut conclure d'après le raisonnement qui a été fait ci-dessus (51) que Π est la quasi-valeur de combinaison de la somme des deux plus grandes racines de la proposée, et que π est la quasi-valeur de la somme des deux plus petites racines.

On peut voir que la relation des deux premiers coëfficiens

$$3A^2 - 8B,$$

est la même que celle qu'on a trouvée dans les deux premiers modes de solution.

Quand on a

$$3A - 8B < 0,$$

les deux expressions de Π et π sont imaginaires. Il semble que, dans ce cas, il doit en résulter la même difficulté de calcul que dans les deux

modes précédens ; mais on verra que ce cas ne souffre aucune difficulté, et qu'on peut parvenir dans tous les cas à décomposer l'équation en facteurs réels, lors même que toutes les racines sont imaginaires.

230. Pour obtenir les quasi-valeurs de Q et q, je procède également de la première équation auxiliaire vers la quatrième, et, pour éviter toute discussion inutile sur la direction du signe d'inéquation, j'emploierai dorénavant le signe $\|$, à l'exception des quasi-valeurs originelles Π et ϖ, dont je déterminerai la direction. J'ai donc de 1 et 2,

$$Q \parallel B - \Pi\varpi - q,$$

et de 1, 2, 3,

$$q \parallel \frac{C - (B - \Pi\varpi)\varpi}{\Pi - \varpi}.$$

Cette quasi-valeur est incomplète, parce qu'elle ne renferme pas la relation du dernier coëfficient, elle servira à trouver la quasi-valeur de Q, par la quatrième équation auxiliaire, et j'ai

$$231.\ Q \parallel \frac{(\Pi - \varpi)D}{C - (B - \Pi\varpi)\varpi} \ldots\ldots \parallel V.$$

En commençant par prendre

$$q \parallel B - \Pi\varpi - Q,$$

j'ai d'abord

$$Q \parallel (B - B\varpi)\Pi - C;$$

d'où j'ai de même

$$232.\quad q \parallel \frac{(\Pi - \varpi)D}{(B - \Pi\varpi)\Pi - C} \ldots \parallel \wp.$$

La première de ces deux quasi-valeurs appartient ou correspond à P, et la deuxième à p. Si l'on change dans cette dernière Π en ϖ, et ϖ en Π ; c'est-à-dire, si l'on change le signe du radical originel, on obtiendra la quasi-valeur de Q, et réciproquement.

Si l'on exprime Π et ϖ en valeurs de coëfficiens de la proposée, on a

$$Q \parallel \frac{4D\sqrt{3A^2 - 8B}}{4C - (A^2 - 2B)(A - \sqrt{3A^2 - 8B})},$$

$$q \parallel \frac{4D\sqrt{3A^2 - 8B}}{(A^2 - 2B)(A + \sqrt{3A^2 - 8B}) - 4C}.$$

On peut encore donner aux deux quasi-valeurs de q et Q les deux formes suivantes :

$$v = \frac{(A - 2\varpi)D}{(A - \varpi)(B - A\varpi + \varpi^2) - C},$$

$$V = \frac{(A - 2\varpi)D}{C - B\varpi + A\varpi^2 - \varpi^3}.$$

233. Maintenant, pour compléter les quasi-valeurs originelles ϖ et Π, je remonte en par-

tant de la quatrième équation auxiliaire vers la première ; je complète d'abord p en fonctions de sa quasi-valeur correspondante v, et j'ai immédiatement des deux équations 4 et 3,

$$p \parallel \frac{Cv - Av^2}{D - v^2} \ldots = k\pi,$$

j'aurais eu également,

$$P \parallel \frac{CV - AV^2}{D - V^2} \ldots = k\Pi.$$

On peut remarquer maintenant que pour compléter la quasi-valeur de p, on a suivi la même que celle qui a été suivie dans la décomposition simple des équations pour compléter et concentrer les quasi-valeurs originelles : on a d'abord pris la quasi-valeur de Q dans cette direction par l'inéquation

$$Q < B - \Pi\varpi ;$$

puis en partant de la dernière équation auxiliaire

$$C = pQ,$$

pour le troisième degré, on a eu

$$p > \frac{C}{B - \Pi\varpi},$$

et ainsi des autres. Cette marche est nécessaire pour la concentration dans la décomposition double comme dans la décomposition simple.

On peut représenter la suite des opérations à faire dans le tableau suivant :

234. $(x^2+px+q)(x^2+Px+Q)=0.$

$$p>\tfrac{1}{2}(A-\sqrt{3A^2-8B})=>\varpi,$$
$$P<\tfrac{1}{2}(A+\sqrt{3A^2-8B})=<\Pi;$$

d'où 1°.

$$q \,\|\, \frac{(\Pi-\varpi)D}{(B-\Pi\varpi)\Pi-C} \,\|\, \nu,$$
$$Q \,\|\, \frac{(\Pi-\varpi)D}{C-(B-\Pi\varpi)\varpi} \,\|\, V;$$

d'où 2°.

$$\left.\begin{aligned} k\varpi&=\frac{C\nu-A\nu^2}{D-\nu^2}\\ k\Pi&=\frac{CV-AV^2}{D-V^2}\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned} &x^2+k\varpi x+\nu=0,\\ &x^2+k\Pi x+V=0;\end{aligned}\right.$$

d'où 3°.

$$x_1 \,\|\, \tfrac{1}{2}\varpi-\sqrt{\tfrac{1}{4}\varpi^2-\nu}$$
$$x_2 \,\|\, \tfrac{1}{2}\varpi+\sqrt{\tfrac{1}{4}\varpi^2-\nu}$$
$$x_3 \,\|\, \tfrac{1}{2}\Pi-\sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2-V}$$
$$x_4 \,\|\, \tfrac{1}{2}\Pi+\sqrt{\tfrac{1}{4}\Pi^2-V}$$

je prendrai pour exemple l'équation

$$x^4+12x^3+49x^2+78x+40=0,$$

dont les facteurs sont

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=0,$$

j'ai

$$\left.\begin{array}{l}\varpi = 2,83775\\ \Pi = 9,16225\end{array}\right\}\text{ d'où } 1^{\circ}.\left\{\begin{array}{l}\nu = 1,90597,\\ V = 19,8692;\end{array}\right.$$

d'où 2°.

$$\left.\begin{array}{l}k\varpi = 2,8895\\ k\Pi = 9,1105\end{array}\right\}\text{ d'où } 3^{\circ}.\left\{\begin{array}{l}x_1 \parallel 1,0189,\\ x_2 \parallel 1,8705,\\ x_3 \parallel 4,2564,\\ x_4 \parallel 4,852.\end{array}\right.$$

On voit que la quasi-valeur de la première racine est la plus rapprochée de la racine correspondante, et que celle de la dernière en est la plus éloignée ; ce qui est conforme à ce qui a été vu dans le mode précédent de décomposition.

235. En considérant les expressions des quasi-valeurs ν et V, on voit qu'elles sont susceptibles de se concentrer comme la quasi-valeur simple ϖ du mode précédent de décomposition ; elles contiennent l'une et l'autre l'expression

$$\frac{[illegible]}{[illegible]}(B - \Pi\varpi),$$

d'après laquelle elles doivent s'approcher de la valeur vraie à chaque pas de concentration; et, par une conséquence nécessaire, $k\varpi$ doit se concentrer également, ainsi que $k\Pi$, comme étant exprimés en fonctions de ν et de V,

et ultérieurement en fonctions de

$$B - \Pi \varpi,$$

ou

$$B - k \Pi \varpi.$$

On a vu dans le mode de décomposition simple, que, d'après l'inéquation $p_1 > \varpi$, il en résultait la série de concentration

$$\begin{array}{ccccccc} \varpi & < & k\varpi & < & k'\varpi & < & k''\varpi, \text{ etc.,} \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge \\ p_1 & & p_1 & & p_1 & & p_1 \end{array}$$

dont la limite était la valeur de p_1, et qu'en donnant à ϖ une valeur ϖ' plus grande que la première racine, mais moindre que la deuxième, on avait une autre série opposée

$$\begin{array}{ccccc} \varpi' & > & k\varpi' & > & k'\varpi', \text{ etc.;} \\ \vee & & \vee & & \vee \\ p_1 & & p_1 \ldots & & p_1. \end{array}$$

qui se rapprochait de la racine en sens contraire; on doit avoir la même chose pour la concentration de la première combinaison binaire de racines ϖ, et pour l'autre paire Π qui en dépend. C'est-à-dire que c'est la seule disposition de racines par combinaison binaire, qui puisse se concentrer. De sorte que si l'on donnait à ϖ' un valeur qui fût très-rapprochée de la deuxième combinaison de racines, ou de la combinaison de la première racine avec la troisième sans cependant l'atteindre, la série de

concentration ramenerait à la valeur de la première combinaison, et si l'on donnait à ϖ' une valeur qui dépassât cette deuxième, la série de concentration l'en éloignerait encore.

On voit que pour concentrer il faut se servir des mêmes formules que celles ci-dessus (86), qui donnent les quasi-valeurs complètes, en y substituant $k\varpi$, $k\Pi$ à la place de ϖ et de Π; cela posé pour concentrer l'exemple ci-dessus, je ne prendrai pas la quasi-valeur totale

$$k\varpi = 2,8895\,;$$

mais comme elle va en croissant, je ne prends qu'une seule décimale en complétant celles que je néglige ; ainsi

je fais $k\varpi = 2,9$........ d'où $k\nu = 1,4419$,
d'où $k'\varpi = 2,9313$;

en suivant directement tous les pas de cette concentration la marche serait lente, pour l'accélérer si je complète la première décimale, j'aurai le nombre 3, qui est la valeur juste, je la dépasse à dessein, et

je fais $k\varpi = 3,1$....... d'où $k\nu = 2,052$,
d'où $k'\varpi = 3,0603$.

Comme dans ce deuxième cas la quasi-valeur concentrée $k'\varpi$ est plus petite que la valeur

supposée $k\varpi$, je conclus que j'ai dépassé la valeur de p, par la supposition de

$$k\varpi = 3{,}1\ ;$$

d'où j'ai les deux quasi-valeurs opposées

$$p > 2{,}9312,$$
$$p < 3{,}0603,$$

dont la quasi-valeur moyenne est

$$p \parallel 2{,}9958.$$

Comme j'ignore si elle est trop grande ou trop petite, je la concentre et

de $k\varpi = 2{,}9958$
j'ai $k'\varpi = 2{,}9971$ } ..... différence 0,0013,

j'ai donc

$$p > 2{,}9971,$$
$$p < 3{,}0603.$$

Je ne prendrai pas la valeur moyenne entre ces deux limites, car le pas de concentration de la limite supérieure, ou sa différence avec le nombre supposée

$$k'\varpi - k\varpi = 0{,}0013,$$

est beaucoup plus petite que le pas de concentration de la deuxième limite, qui provient de la supposition de

$$k\varpi = 3{,}1,$$

et dont le pas

$$= 0{,}0397.$$

Je conclus de-là que la première limite est beaucoup plus rapprochée de la valeur de p; pour la concentrer je complète la troisième décimale, les deux premières étant les mêmes que dans la quantité supposée; mais en la complétant, sa limite serait $=3$, et comme je sais que c'est la valeur vraie, je la dépasse, et je fais $k\varpi = 3{,}001$...... d'où $k\nu = 2{,}006$, d'où $k'\varpi = 3{,}0007$;
d'où j'ai

$$p > 2{,}9971,$$
$$p < 3{,}0007.$$

Comme la deuxième limite est à présent la plus rapprochée, je complète en décroissement la dernière décimale 7, j'aurais encore la valeur 3, je la dépasse et je fais

$$k\varpi = 2{,}9999 \ldots\ldots\ldots k\nu = 1{,}99994,$$
$$k'\varpi = 2{,}99994;$$

d'où

$$p > 2{,}99994,$$
$$p < 5{,}0007;$$

je complète alors la première de ces deux limites et je fais

$$k\varpi = 3{,}0001 \ldots\ldots\ldots k\nu = 2{,}00006,$$
$$k'\varpi = 3{,}00007;$$

d'où

$$p > 2{,}99994,$$
$$p < 3{,}00007,$$

dont la valeur moyenne est

$$p \parallel 3{,}000005\,;$$

en faisant un nouveau pas de concentration, j'aurais

$$p \parallel 3{,}0000005\,,$$

et ainsi de suite.

J'ai concentré les deux limites comme si la valeur à laquelle on doit aboutir était incommensurable. On peut remarquer que quand les valeurs que l'on cherche par la concentration sont commensurables, les décimales exactes des deux limites opposées sont exprimées par des 9 dans la limite inférieure à la valeur, et par des zéro dans la limite qui lui est supérieure.

Mais quand la valeur à laquelle on doit aboutir est incommensurable, les décimales exactes sont identiques dans les deux limites opposées.

236. Les pas de concentration étant d'autant plus petits que la limite est plus rapprochée de sa valeur vraie, on peut considérer qu'ils sont proportionnels à cette distance, quoique ce rapport ne soit pas bien exact, il aide à accélerer la concentration. Je suppose, par exemple, que j'aie les deux limites opposées

$$p > 1,4352,$$
$$p < 1,4357,$$

et que le pas de concentration de la première ne soit que le quart de celui de la deuxième, comme l'intervalle qui les sépare

$$= 0,0005,$$

j'augmenterai dans ma nouvelle supposition la première limite de 0,0001, ou je diminuerai la deuxième de 0,0004, et je ferai

$$k\,\varpi = 1,4353.$$

En opérant ainsi successivement, je pourrai acquérir une décimale exacte à chaque opération; et il n'en faudra jamais plus de deux. C'est par ce moyen qu'on peut concentrer les quasi-valeurs, lorsque la concentration directe, ou sans supposition est trop lente.

On voit qu'en concentrant seulement ϖ on acquiert la valeur concentrée de Π. Si l'on veut avoir la quasi-valeur V de Q, il faut la prendre d'après la formule

$$Q = \frac{(\Pi - \varpi)D}{C - (B - \Pi\varpi)\varpi}.$$

Dans l'exemple ci-dessus on obtient exactement

$$Q = 20,$$

au lieu que si on la prend en divisant le dernier terme D par la quasi-valeur concentrée

$k\nu$, on obtient une valeur moins exacte, on fait retrograder d'un pas la concentration ; car alors on a V par la formule

$$Q \parallel \frac{C - (B - \Pi\varpi)\varpi}{\Pi - \varpi}.$$

237. Par ce moyen on peut donc décomposer une équation du quatrième degré en deux facteurs du deuxième avec des coëfficiens aussi exacts qu'on veut les avoir. Mais cette décomposition ne peut se faire que par la séparation de combinaison des deux plus petites racines d'avec celle des deux plus grandes, comme je l'ai dit, et comme on peut le voir par cet exemple, dans lequel la seconde combinaison de racines est

$$(x + 1)(x + 4),$$

qui donne $p = 5$; je fais d'abord

$$\varpi = 4{,}9 \ldots\ldots\ldots \quad \nu = 3{,}84,$$
$$k\varpi = 4{,}4 ;$$

où l'on voit que la concentration éloigne de la valeur $p = 5$ et rapproche de $p = 3$. Je dépasse maintenant la valeur de p, pour cette deuxième combinaison, et je fais

$$\varpi = 5{,}1 \ldots\ldots\ldots \quad \nu = 4{,}1644,$$
$$k\varpi = 5{,}42.$$

On voit que dans ce deuxième cas j'éloigne encore de $p = 5$. Ainsi l'on voit que la deuxième

combinaison de racines est inconcentrable, comme la deuxième racine dans la décomposition simple et par le même principe.

Je ne m'occuperai pas de la troisième combinaison de racines ni des suivantes, parce que Π, variant par rapport à ϖ, est tantôt plus grand et tantôt plus petit, selon le rapport des racines entr'elles. Il en résulte une complication pour les différens cas, dans laquelle il est inutile de s'embarrasser.

Il suffit de savoir que les formules ci-dessus donnent des quasi-valeurs qui appartiennent, pour p et q, à la paire des deux plus petites racines; et pour P et Q à la combinaison des deux plus grandes; et de savoir que ces mêmes formules servent à la concentration de ces quasi-valeurs.

238. J'ai supposé que toutes les racines étaient du même signe, et ce n'est que dans ce cas que le calcul des inéquations peut résoudre les équations soit en facteurs simples, soit en facteurs composés. Mais si les racines étaient en parties négatives et positives, il serait facile de ramener l'équation à avoir toutes ses racines du même signe. Il faudrait, pour cela, prendre la quasi-valeur originelle de la première racine, d'après le mode de décomposition simple, d'après laquelle on a

$$p_1 > \tfrac{1}{4}(A - 3\sqrt{A^2 - \tfrac{8}{3}B} = > \varpi;$$

puis en faisant

$$x = -(\varpi + z),$$

et en substituant cette valeur à la place de x dans la proposée, on aura l'équation en z, dont toutes les racines sout positives, et qu'on pourra alors décomposer en deux facteurs du deuxième degré ; alors il sera facile d'avoir les valeurs des coëfficiens des facteurs du deuxième degré en x, comme on le verra par les exemples qui suivront.

Dans l'exemple qu'on vient de résoudre, toutes les racines étaient réelles. Il s'agit de voir maintenant comment il faut procéder dans la résolution des équations qui contiennent des racines imaginaires.

239. Il faut d'abord distinguer deux sortes d'équations, dont les racines sont imaginaires; la première sorte appartient à celles qui donnent, pour Π et ϖ, des quasi-valeurs toutes réelles, ce qui a lieu toutes les fois que le radical originel *Des racines imaginaires.*

$$\sqrt{3A^2 - 8B},$$

est réel ; la deuxième sorte renferme les équations dans lesquelles ce radical est imaginaire.

Je vais m'occuper d'abord de la première

sorte; il faut alors distinguer deux cas, 1°. lorsque toutes les racines sont imaginaires; 2°. lorsqu'il y en a deux de réelles et deux d'imaginaires.

D'abord lorsque toutes les racines sont imaginaires, les formules de solution décomposent l'équation en ses deux facteurs réels. En effet les racines imaginaires, comme on l'a déjà vu, ne peuvent se trouver que par paires de deux racines, dont la partie réelle est égale, et dont la partie imaginaire ne diffère que par le signe dans les deux. De sorte que l'équation peut être considérée composée de cette manière :

$$[(x+a)^2+f][(x+b)^2+g]=0;$$

les deux quantités f et g exprimant la partie imaginaire dans les deux paires de racines. Cela posé, puisque les formules décomposent l'équation en deux paires de racines, dont la première contient les deux plus petites, et la seconde les deux plus grandes, il est nécessaire que les coëfficiens ϖ et ν appartiennent à la première paire de racines imaginaires, et Π et V à la seconde; donc les formules de décomposition ne dépareillent pas les racines imaginaires de l'équation; donc les facteurs que l'on obtient doivent être réels;

donc les quasi-valeurs des coëfficiens peuvent se concentrer. Il faut remarquer que les facteurs ne peuvent être imaginaires qu'autant qu'ils contiennent deux racines dépareillées. Ainsi les facteurs contenant les racines appareillées seront :

$1^{er}...(x+a+\sqrt{-f})(x+a-\sqrt{-f})=x^2+2ax+a^2+f,$

$2^{e}....(x+b+\sqrt{-g})(x+b-\sqrt{-g})=x^2+2bx+b^2+g;$

et en les dépareillant de cette manière :

$1^{er}...\ (x+a+\sqrt{-f})\,(x+b-\sqrt{-g}),$

$2^{e}....\ (x+a-\sqrt{-f})\,(x+b+\sqrt{-g}),$

chaque produit binaire ne pourrait plus donner un résultat dégagé de quantités imaginaires.

Je prends, pour exemple, l'équation

$$x^4+7x^3+17x^2+16x+10=0,$$

qui a pour facteurs

$$(x^2+x+1)(x^2+6x+10)=0,$$

j'ai d'abord pour les formules

$\Pi\ =5,6794.$

$\varpi\ =1,3006.....\ \nu=1,2065.$ Différences.

d'où .... 0,256.

$k\varpi=1,0666.....k\nu=1,0285.$

.... 0,0566.

$k'\varpi=1,00998....k\nu=1,004.$

.... 0,00822.

$k''\varpi=1,00176.$

J'ai fait ces trois premiers pas de concentration directement ; c'est-à-dire sans faire aucune supposition de valeurs, et toujours d'après la valeur trouvée. On voit ici d'abord que la concentration est assez rapide, en second lieu les différences des pas de concentration font voir qu'elle est convergente.

On peut voir de plus que l'on s'approche de la valeur par une suite de décroissemens, tandis que l'on s'en approche par une suite d'accroissemens quand les racines sont réelles ; c'est ce qui distingue les facteurs de racines réelles de ceux qui sont une combinaison de deux racines imaginaires.

Maintenant, au lieu de continuer la concentration de

$$k'\varpi = 1{,}00998\,,$$

je complète les décimales et je franchis, à dessein, la valeur vraie qui est $= 1$, en faisant

$$k\,\varpi = 0{,}99 \ldots\ldots\ldots \quad k\,\nu = 0{,}9958\,,$$
$$k'\,\varpi = 0{,}99812.$$

Ainsi, dans ce cas, la série de concentration a lieu dans une direction opposée quand on a franchi la valeur, comme dans les équations dont les racines sont réelles ; j'ai donc

$$p < 1{,}00176\,,$$
$$p > 0{,}99812\,;$$

quasi-valeur moyenne

$$p \parallel 0{,}99994.$$

En prenant les quasi-valeurs de kv et kV, l'équation se trouve décomposée en ces deux facteurs :

$$x^2 + 0{,}99994\, x + 0{,}99983 \parallel 0,$$
$$x^2 + 6{,}00006\, x + 10{,}00016 \parallel 0.$$

240. Je viens maintenant au cas où l'équation contient deux racines réelles et deux imaginaires. Ce cas en renferme deux autres, le premier est lorsque les deux racines réelles forment ou la première ou la dernière combinaison des racines, ou lorsque la paire de racines imaginaires appartient à l'un des deux facteurs que donnent les formules ci-dessus. Ce cas ne souffre pas plus de difficulté que le précédent, parce que les deux facteurs sont réels. Je prends, pour exemple, l'équation

$$x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 15x + 9 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 6x + 9),$$

et qui contient deux racines imaginaires et deux racines égales ; je concentre d'abord ses quasi-valeurs directement, et j'ai

$\Pi = 5{,}6794.$

$\varpi = 1{,}3206 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \nu = 1{,}1791.$

$k\ \varpi = 1{,}0453 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ k\ \nu = 1{,}0225.$

$k'\ \varpi = 1{,}0081 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ k'\nu = 1{,}00397.$

$k''\varpi = 1{,}0014 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ k''\nu = 1{,}00068.$

$k'''\varpi = 1{,}00055.$

Si je complète maintenant la première décimale qui n'est pas exacte, et si en dépassant la valeur

je fais $k\ \varpi = 0{,}999 \ldots\ldots\ k\nu = 0{,}9995,$
j'ai $k'\ \varpi = 0{,}99981,$

où l'on voit que la concentration fait remonter vers la valeur vraie qu'on avait dépassée.

La concentration, comme dans le cas précédent, converge vers la valeur en sens contraire de celui qui a lieu quand les racines sont toutes réelles. Ce n'est pas à dire pour cela que l'on doive avoir dans tous les cas où les facteurs sont des paires de racines imaginaires

$$p < \varpi,\ p > \Pi\,;$$

mais on converge toujours en deux sens opposés vers la valeur, comme dans l'exemple suivant :

Soit l'équation

$$x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 14x + 18 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 6x + 8) = 0,$$

on a

$P < \Pi = < 6{,}09805.$
$p > \pi = > 0{,}90195 \ldots\ q > \nu = > 0{,}9462.$
$p > k\pi = > 0{,}9824 \ldots\ q > k\nu = > 0{,}99.$
$p > k'\pi = > 0{,}997.$

Je fais à présent, pour dépasser la valeur,

$k\pi = 1{,}001$.......... j'ai $\nu = 1{,}0005$,
d'où $k'\pi = 1{,}0005$.

Puisque la concentration diminue la valeur de $k\pi$, je conclus que j'ai

$$p < k'\pi = < 1{,}0005,$$

et que, par conséquent, la concentration converge vers la valeur dans un sens opposé ; d'où j'ai

$$p > 0{,}997,$$
$$p < 1{,}0005.$$

241. Je viens maintenant au cas où les deux racines imaginaires sont les deux racines moyennes de l'équation, ou lorsque les deux racines réelles sont la première et la dernière de l'équation ; par ce qui précède on voit que les formules ci-dessus décomposent toujours l'équation en deux facteurs, dont le premier contient les deux plus petites ou les deux pre-

mières racines de l'équation, et le deuxième, les deux plus grandes. Il s'ensuit que, dans ce cas, chaque facteur doit contenir une racine réelle avec l'une des deux de la paire de racines imaginaires; on ne peut donc obtenir leur valeur qu'en expressions imaginaires; c'est-à-dire qu'on ne peut pas y parvenir, parce que la concentration ne peut conduire qu'aux valeurs exactes des quantités réelles.

Dans ce cas on peut avoir recours à la décomposition de l'équation en facteurs simples; la première racine est alors réelle, et on obtient facilement sa valeur par la concentration. (Il faut observer que les deux racines extrêmes ne peuvent pas former la paire de racines imaginaires, puisque leur partie rationnelle est la même.)

Néanmoins on peut encore, par la seule décomposition en facteurs doubles et indépendamment de l'autre méthode, parvenir à décomposer les équations de cette espèce, et à concentrer les deux facteurs doubles réels. On a vu que lorsque les deux premières racines étaient de même espèce ou toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires, on aboutissait aux valeurs vraies des deux coëfficiens par deux directions opposées, d'où l'on a conclu que l'on s'éloignait par la concentration de la

deuxième combinaison de racines en aboutissant toujours à la première ; mais lorsque la première combinaison ou lorsque la paire des deux plus petites racines est composée d'une réelle et d'une imaginaire, alors on franchit par la concentration les valeurs des coëfficiens de cette première paire, et l'on aboutit à la deuxième qui est composée de deux racines imaginaires, et dont tous les coëfficiens sont par conséquent réels.

Mais, pour y parvenir il faut faire l'inconnue $x = y +$ une autre quantité assez grande pour que les plus petites quasi-valeurs des parties réelles surpassent la partie imaginaire de l'équation, qui reste toujours la même dans ce changement. Ceci va s'éclaircir par des exemples.

Soit l'équation

$$x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 32x + 16 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x+1)(x^2 + 3x + 4)(x + 4) = 0,$$

j'ai

$\pi = 5{,}4142.$

$\varpi = 2{,}5858$ .... $\nu = 2{,}7061.$

$k\ \varpi = 3{,}2282$ .... $k\ \nu = 5{,}8172.$

$k'\ \varpi = 4{,}7403$ .... $k'\ \nu = 3{,}2031.$

$k''\varpi = 3{,}571$ .... $k''\ \nu = -7{,}5593.$

On voit d'abord dans cet exemple que la quasi-valeur originelle ϖ a dépassé la valeur de la partie réelle des deux plus petites racines, qui est $=1$, pour la racine réelle, et $\frac{5}{2}$ pour la partie réelle de l'autre racine $=2,5$; la concentration fait également franchir la paire des deux racines imaginaires, ensuite on obtient des quasi-valeurs divergentes qui n'ont aucune loi, et qui dépendent de la partie imaginaire qui est une quantité purement additionnelle ajoutée au quarré d'un binôme.

Mais, maintenant, si je fais $x=y+4$, j'aurai l'équation

$$y^4+24y^3+215y^2+856y+1280=0,$$

dont les facteurs sont

$$(y+5)(y^2+11y+32)(y+8),$$

j'ai

Différences de $k\varpi$.

$n=13,4142.$

$\varpi=10.5858$ .... $\nu=29,37705.$

.... 0,0464.

$k\ \varpi=10,6322$ .... $k\ \nu=29,6466.$

.... 0,0472.

$k'\ \varpi=10,6794$ .... $k'\nu=29,8481.$

.... 0,0357.

$k''\ \varpi=10,7151$ .... $k''\nu=29,9147.$

.... 0,0081.

$k'''\varpi=10,7232.$

On peut observer d'abord que la quasi-valeur de ϖ dépasse, comme dans le premier cas, la valeur de la partie rationnelle de la première paire de racines. Ensuite, en remarquant les différens pas de concentration ou les différences de $k\pi$, on voit d'abord que la deuxième différence est plus grande que la première, parce que la concentration va en s'éloignant de la valeur de la première paire, puis ces différences vont en décroissant, parce que la concentration se rapproche de la deuxième paire de racines, il en résulte une série de concentration, dont la limite est la valeur de cette deuxième paire. Il est aisé d'accélérer sa marche par les mêmes moyens qu'on a employés ci-dessus, et on verra que la concentration aboutit vers la deuxième paire de racines qui est $= 11$ par deux directions opposées; car si je fais

$k\pi = 10{,}9 \ldots\ldots\ldots\ldots k\nu = 31{,}3059$,
j'ai $k'\pi = 10{,}9235$;

et si, en dépassant la valeur, je fais

$k\pi = 11{,}1 \ldots\ldots\ldots\ldots k\nu = 32{,}75142$,
j'ai $k'\pi = 11{,}0515$.

Cette dernière quasi-valeur se rapproche de la vraie valeur 11 dans une direction contraire à la première. On peut donc résoudre ces

espèces d'équations de la même manière que les autres. Il est facile de les reconnaître, car ce sont les seules qui, par la concentration, ne présentent pas immédiatement une série convergente de concentration ; alors on a recours au moyen qu'on vient d'employer.

242. Je viens maintenant au cas où le radical originel

$$\sqrt{3A^2 - 8B}$$

est imaginaire

$$= \sqrt{-r};$$

alors les deux quasi-valeurs

$$\varpi = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{-r},$$
$$\varpi = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{r},$$

doivent être considérées comme la réunion de deux racines dépareillées, et, comme dans ce cas, les racines ont en fonction imaginaire ce qui constitue leur inégalité, je décompose ϖ et Π de cette manière :

$$\varpi = \begin{cases} \tfrac{1}{4}A, \\ + \tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{-r}, \end{cases}$$

$$\Pi = \begin{cases} \tfrac{1}{4}A, \\ + \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{-r}; \end{cases}$$

et je reforme les deux facteurs de l'équation de cette manière :

$$x^2 + \tfrac{1}{2}Ax + \tfrac{1}{16}A^2 + \tfrac{1}{4}r = 0,$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}Ax + \frac{D}{\tfrac{1}{16}A^2 + \tfrac{1}{4}r} = 0.$$

Par ce moyen les quasi-valeurs des racines se trouvent appareillées dans les deux facteurs. Il s'agit de confirmer et d'éclaircir ceci par différens exemples.

Soit d'abord l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 15x^2 + 32x + 20 = 0,$$

dont les facteurs sont

$$(x^2 + x + 10)(x + 1)(x + 2) = 0.$$

Dans ce cas-ci, comme la partie imaginaire domine la partie réelle, ce qu'on reconnaît toujours parce qu'alors les derniers coëfficiens de l'équation C et D sont très-grands par rapport au premier coëfficient A, je fais donc

$$x = z + 10,$$

et j'ai la nouvelle équation

$$z^4 + 44z^3 + 735z^2 + 5532z + 15840 = 0,$$

qui a pour facteurs

$$(z^2 + 21z + 120)(z + 11)(z + 12) = 0,$$

j'ai

$$\sqrt{-r} = \sqrt{-72},$$

alors j'ai les deux nouveaux facteurs

$$\left.\begin{array}{l} z^2+\frac{1}{2}Az+\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}r \\ z^2+\frac{1}{2}Az+\dfrac{D}{\frac{1}{16}A^2+\frac{1}{4}r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} z^2+22z+139 & \| 0, \\ z^2+22z+113{,}95 & \| 0; \end{array}\right.$$

je concentre alors selon la méthode ordinaire, j'ai d'abord

$\varpi = 22$. . . . . $\nu = 114$.
$k\,\varpi = 20{,}6835$. . . . . $k\,\nu = 115{,}5776$.
$= 115{,}6$.
$k'\varpi = 21{,}1188$. . . . . $k'\nu = 121{,}9276$.
$k''\varpi = 20{,}9358$.

En concentrant ainsi directement je vois que la série est convergente et alternative ; pour accélérer je prends le terme moyen entre $k'\varpi$ et $k''\varpi$, j'ai donc

$k''\varpi = 21{,}08$. . . . . $k''\nu = 121{,}2781$,
$k'''\varpi = 20{,}9803$;

en compensant

$k'''\varpi = 21{,}03$. . . . . . . $k'''\nu = 120{,}4692$,
$k^{\text{iv}}\varpi = 21{,}0004$.

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour voir comment la concentration se fait rapidement.

Si l'on eût opéré ainsi immédiatement sur l'équation en x, on aurait passé par-dessus les valeurs, et on aurait obtenu des résultats sans aucune loi qui auraient averti de la nécessité de faire $x = z + a$.

Soit maintenant proposée pour deuxième

exemple l'équation

$$x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 9x + 10 = 0,$$

qui a pour facteurs

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 5) = 0,$$

et qui est, comme on sait, composée de quatre racines imaginaires ; néanmoins elle peut se résoudre immédiatement sans qu'il soit besoin de la préparer, en la résolvant comme ci-dessus ; on a d'abord

$$\sqrt{-r} = \sqrt{-45};$$

et la transformation des deux facteurs donne

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{16}A^2 + \frac{1}{4}r \\ x^2 + \frac{1}{2}Ax + \dfrac{D}{\frac{6}{16}A^2 + \frac{1}{4}r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x^2 + 1,5x + 13,5, \\ x^2 + 1,5x + 0,74; \end{array}\right.$$

j'ai donc

$$\begin{array}{ll}
\varpi = 1,5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v = 0,74. \\
k\ \varpi = 0,6466 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & k\ v = 1,9846. \\
k'\ \varpi = 0,9953 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & k'v = 2,0018. \\
k''\ \varpi = 1,0003 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & k''v = 1,99988. \\
 & = 1,9999. \\
k'''\varpi = 0,99998. &
\end{array}$$

On voit avec quelle rapidité s'effectue directement la concentration. Les valeurs auxquelles on aboutit sont $\varpi = 1$, $v = 2$.

Soit enfin, pour troisième exemple, l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 10 = 0,$$

dont les racines sont toutes imaginaires et in-

commensurables, comme elle ne peut pas se décomposer en facteurs susceptibles de concentration, telle qu'elle est, je fais

$$x = z + 10,$$

et j'ai

$$x^4 + 41\,x^3 + 631\,x^2 + 4321\,x + 11120 = 0\,;$$

j'ai d'abord

$$\sqrt{-r} = \sqrt{-5},$$

et pour les deux facteurs transformés

$$x^2 + 20,5\,x + 106,584,$$
$$x^2 + 20,5\,x + 104,326,$$

j'ai donc

$\varpi = 20,5$........... $\nu = 104.$
$k\,\varpi = 19,5$........... $k\,\nu = 96,04.$
$k'\varpi = 19,4.$

Je vois que la série de concentration va en décroissant, et je remarque qu'elle a une marche assez lente, ce qui est une conséquence du rapport de Π à ϖ, qui diffère peu de l'unité, et c'est ce qui doit arriver toutes les fois qu'on transforme l'équation en ajoutant à x une valeur assez considérable pour que les valeurs de ϖ et Π diffèrent peu entr'elles. Pour accélérer la concentration, je ne la fais plus marcher directement, mais par une suite de substitutions successives;

Différences.

je fais $k'\varpi=19$.................. j'ai $k'v=91,3972$.

.........$-0,0465$.

d'où $k'\varpi=18,9535$.

Je fais $k''\varpi=18$................. $k''v=12,98505$.

.........$+0,0067$.

d'où $k''\varpi=18,0067$.

J'ai donc

$$p < 18,9535,$$
$$p > 18,0067.$$

Comme la dernière différence est à peu près dix fois plus petite que la première,

je fais $k'''\varpi=18,1$................. j'ai $k'''v=83,7823$.

.........$+0,001$.

d'où $k^{\text{iv}}\varpi=18,101$.

Je fais $k^{\text{iv}}\varpi=18,2$............... $k^{\text{iv}}v=84,582$.

.........$-0,0037$.

d'où $k^{\text{v}}\varpi=18,1962$.

J'ai donc

$$p > 18,101,$$
$$p < 18,1962.$$

Comme la première différence est trois fois plus petite que la deuxième,

je fais $k_{\text{v}}\varpi=18,12$.............. $k^{\text{v}}v=83,94296$.

.........$+0,000252$.

d'où $k_{\text{vi}}\varpi=18,120252$.

Je fais $k^{\text{vi}}\varpi=18,13$.............. $k^{\text{vi}}v=84,0234$.

.........$-0,0003$.

d'où $k^{\text{vii}}\varpi=18,1297$.

J'ai donc

$$p > 18,120252,$$
$$p < 18,1297.$$

Comme les différences sont à peu près égales,

Différences.

je fais $k^{VII}\varpi = 18,125$................ j'ai $k^{VII}v = 83,983168$.

.....$-0,000013$.

d'où $k^{VIII}\varpi = 18,124987$.

Je fais $k^{VIII}\varpi = 18,124$................ $k^{VIII}v = 83,975126$.

.....$+0,000063$.

d'où $k^{IX}\varpi = 18,124037$.

J'ai donc

$$p < 18,124987,$$
$$p > 18,124037.$$

Comme la première différence est plus petite,

je fais $k^{IX}\varpi = 18,1248$................ $k^{IX}v = 83,9815235$.

.....$-0,00000006$.

d'où $k^{X}\varpi = 18,12479994$.

Je fais $k^{X}\varpi = 18,12475$................ $k^{X}v = 83,981156$.

.....$+0,0000007$.

d'où $k^{XI}\varpi = 18,1247503$.

J'ai donc

$$p < 18,12479994,$$
$$p > 18,1247503.$$

Je fais $k^{XI}\varpi = 18,12478$................ $k^{XI}v = 83,9814$.

.....$-0,00000097$.

d'où $k^{XII}\varpi = 18,12477903$.

J'ai donc

$$p < 18,12477903,$$
$$p > 18,1247503.$$

Comme les deux différences sont sensiblement égales, je prends la valeur moyenne, en m'arrêtant à ce degré d'approximation, et j'ai enfin

$p = 18,124765$.......... $q = 83,981278$.

$P = 22,875235$.......... $Q = 132,410464$.

En reprenant enfin la valeur de x, l'équation proposée se trouve décomposée en ces deux facteurs :

$$x^2 - 1{,}875235\,x + 2{,}733628 = 0,$$
$$x^2 + 2{,}875235\,x + 3{,}658114 = 0.$$

243. On peut également résoudre une équation dans laquelle le radical originel serait nul.

Soit l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = 0,$$

j'ai

$$\sqrt{r} = 0,$$

d'où je fais

$$\varpi = \tfrac{1}{2}A,$$
$$\Pi = \tfrac{1}{2}A;$$

d'où

$$x^2 + 2x + 1 \,\|\, 0,$$
$$x^2 + 2x + 3 \,\|\, 0;$$

j'ai donc

$\varpi =$ 2................ $v = 1.$
$k\ \varpi = -0{,}5$................ $k\ v = 0{,}4444.$
$k'\ \varpi =$ 0,194............... $k'\ v = 0{,}8191.$
$k''\ \varpi = -0{,}0981$............ $k''\ v = 0{,}5418.$
$k'''\varpi =$ 0,1167............ $k'''v = 0{,}6268.$
$k^{iv}\varpi =$ 0,1186............ $k^{iv} v = 0{,}6021.$

La série de concentration est alternative ; pour la rendre plus rapide, je fais ici la compensation par les quasi-valeurs de q, pour faire voir qu'on peut compenser indifférem-

ment par les quasi-valeurs de p ou de q, j'ai donc

$$k^{\text{IV}}\nu = 0,6144,$$

d'où

$$k^{\text{V}}\varpi = 0,1271 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k^{\text{V}}\nu = 0,613;$$

j'ai pour quasi-valeur moyenne

$$k^{\text{V}}\nu = 0,6137,$$

d'où

$$k^{\text{VI}}\varpi = 0,12754 \ldots\ldots\ldots\ldots k_{\text{VI}}\nu = 0,61333.$$

En décomposant encore, et prenant de-là la valeur de $k\varpi$, j'ai les deux équations avec 4 décimales exactes :

$$x^2 + 0,1273\,x + 0,6135 = 0,$$
$$x^2 + 3,8727\,x + 4,88997 = 0.$$

Maintenant si j'avais l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0,$$

qui ne diffère de la quatrième puissance du binôme $x + 1$ que par le coëfficient du troisième terme auquel il manque une unité; on ne pourrait par la méthode précédente que décomposer l'équation en deux quarrés parfaits

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = 0,$$

et l'expression

$$\frac{C\nu - A\nu^2}{D - \nu^2}$$

donnerait une valeur infinie, elle est égale à $\frac{0}{0}$ quand la quatrième puissance est exacte.

Il ne faut pas conclure de-là qu'il y a des équations composées, que le calcul des inéquations ne puisse pas décomposer en facteurs du deuxième degré.

244. En effet en reprenant ci-dessus (232), on a, 1°. de la troisième inéquation auxiliaire

$$Q = \frac{C - qP}{A - P};$$

2°............ $Q < \frac{1}{4}P^2$;

j'obtiens de-là l'inéquation

$$q > \frac{P^3 - AP^2 + 4C}{4P},$$

et avec l'inéquation

$$q < \frac{1}{4}p^2,$$

j'obtiens l'inéquation du deuxième degré

$$P^2 - AP + \frac{4C}{A} < 0;$$

de-là on obtient encore les deux quasi-valeurs

$$P < \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - \frac{16C}{A}} \ldots\ldots\ldots = < \Phi,$$

$$p > \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - \frac{16C}{A}} \ldots\ldots\ldots = > \varphi.$$

Ces deux quasi-valeurs sont les mêmes que les deux précédentes Π et ϖ ; la seule différence est que le radical originel exprime la relation des deux coëfficiens A et C ; elle est telle qu'il

est = o quand toutes les racines sont égales, comme pour l'autre radical

$$\sqrt{3A^2 - 8B}.$$

En appliquant ces nouvelles quasi-valeurs au problême proposé, on a

$$\sqrt{A^2 - \frac{16C}{A}} = \sqrt{r'} = 2.$$

$\Pi = 3$.................... $V = 0,66667$.
$\varpi = 1$.................... $\nu = 0,3333$.

On a pris ici les quasi-valeurs de V et ν par les formules

$$\nu = \frac{(\Phi - \varphi)D}{(B - \Phi\varphi)\varphi - C},$$

comme ci-dessus. En se servant des mêmes formules pour la concentration, on a

$\varpi = 1$.................. $\nu = 0,3333$.
k $\varpi = 0,625$.............. k $\nu = 0,2714$.
k' $\varpi = 0,5608$............. k' $\nu = 0,2597$.
k'' $\varpi = 0,546$.............. k'' $\nu = 0,2594$.
$k'''\varpi = 0,54579$.

Je vois que la série est décroissante, pour la franchir je prens

k''' $\varpi = 0,5457$............ k''' $\nu = 0,25936$.
k^{v} $\varpi = 0,54572$.

Comme la série retourne en croissant, je con-

clus que 0,5457 a dépassé la valeur, et que l'on a par conséquent

$$p < 0{,}64579,$$
$$p > 0{,}54572;$$

en prenant les quasi-valeurs moyennes, les deux facteurs de l'équation deviennent

$$x^2 + 0{,}54575 + 0{,}255995,$$
$$x^2 + 3{,}45425 + 3{,}90625.$$

On voit que les quatre racines sont imaginaires.

245. Enfin il reste à déterminer le cas où l'on a à la fois

$$\sqrt{3A^2 - 8B} = 0$$

et

$$\sqrt{A^2 - \frac{16C}{A}} = 0;$$

alors les relations des trois premiers coëfficiens qui sont affectés de x appartiennent à la quatrième puissance du binôme

$$x + \tfrac{1}{4}A,$$

il n'y a plus que le dernier terme composé de quantités connues qui n'appartiennent pas à une puissance exacte. On résout ces sortes d'équations comme celles du deuxième degré, en complétant la quatrième puissance : elles ne peuvent avoir que cette forme :

$$x^4 + Ax^3 + \tfrac{3}{8}A^2x^2 + \tfrac{1}{16}A^3x + D = 0;$$

en complétant cette quatrième puissance, on a

$$x^4+Ax^3+\frac{3}{8}A^2x^2+\frac{1}{16}A^3x+\frac{1}{4^4}A^4=\frac{1}{4^4}A^4-D$$

et

$$x+\frac{1}{4}A=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{4^4}A^4-D}.$$

Ainsi l'équation

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+3=0,$$

donne

$$x+1=\sqrt[4]{-2}.$$

Les équations du troisième degré dans lesquelles le radical originel

$$\sqrt{A^2-3B}=0,$$

se résolvent de la même manière. Ainsi l'équation

$$x^3+3x^2+3x+3=0,$$

donne

$$x+1=\sqrt[3]{-2}.$$

En général, une équation d'un degré quelconque, dans laquelle tous les termes conviennent à la puissance exacte d'un binôme excepté le dernier, se résout comme celle du deuxième degré. Et on reconnaît cette qualité dans une équation par la relation successive de tous ses coëfficiens avec le premier.

On peut voir que la résolution des équations du quatrième degré, par leur décomposition en facteurs doubles, est plus simple que par la décomposition en facteurs simples, surtout lorsque l'équation contient des racines imaginaires.

DEUXIÈME SECTION.

246. *De la résolution des équations du cinquième degré.*

Soit l'équation générale

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

je la décompose en

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^2 + px + q) = 0,$$

j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 \\ \quad + px^4 + Ppx^3 + Qpx^2 + Rpx \\ \qquad + qx^3 + Pqx^2 + Qqx + Rq \end{array}\right\} = 0$$

D'où j'ai les équations auxiliaires

$A = P + p$ . . . . 1.

$B = Pp + Q + q$ . . . . 2.

$C = R + Pq + Qp$ . . . . 3.

$D = Rp + Qq$ . . . . 4.

$E = Rq$ . . . . 5.

et les deux inéquations

$$Q < \tfrac{1}{3} P^2 \ (228) \ldots\ldots\ldots\ldots \ 1.$$
$$q > \tfrac{1}{4} p^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 2.$$

Des équations 1 et 2, et de l'inéquation 1, j'obtiens

$$q > \frac{2P^2 - 3AP + 3B}{3};$$

et de l'inéquation 2,

$$q < \tfrac{1}{4}(A^2 - 2AP + P^2);$$

d'où

$$P^2 - \tfrac{6}{5} AP < \tfrac{3}{5} A^2 - \tfrac{12}{5} B;$$

d'où enfin

$$P < \tfrac{1}{5}(3A + 2\sqrt{3(2A^2 - 5B)}) = < \Pi.$$
$$P > \tfrac{1}{5}(3A - 2\sqrt{3(2A^2 - 5B)}) = > \Phi.$$

D'après les raisonnemens qu'on a faits ci-dessus, la première de ces deux quasi-valeurs appartient à la somme des trois plus grandes racines, et la deuxième à la somme des trois plus petites. Pour avoir p, j'ai

$$A - p < \Pi \text{ et } A - p > \Phi;$$

247. D'où

$$p_1 > \tfrac{2}{5}(A - \sqrt{3(2A^2 - 5B)}) \ldots = > \pi.$$
$$p_{10} < \tfrac{2}{5}(A + \sqrt{3(2A^2 - 5B)}) \ldots = < \varphi.$$

La première de ces deux quasi-valeurs provenant de Π, appartient par conséquent à la somme des deux plus petites racines, et la deu-

xième à la somme des deux plus grandes, elle est par conséquent la dixième combinaison des cinq racines prises deux à deux; voilà pourquoi je les exprime par

$$p_1 > \pi \text{ et } p_{10} < \varphi.$$

Pour trouver la quasi-valeur de q, j'ai des équations auxiliaires,

$1, 2 \ldots\ldots Q = B - Ap + p^2 - q.$

$3 \ldots\ldots\ldots R = C - Aq + 2pq - Bp + Ap^2 - p^3.$

$4 \ldots\ldots\ldots R = \dfrac{D - Bq + Apq - p^2q + q^2}{p}.$

De ces deux valeurs de R, j'ai

$$q^2 = (B - 2Ap + 3p^2)q - (D - Cp + Bp^2 - Ap^3 + p^4),$$

puis avec l'équation auxiliaire 5,

$$R = \frac{E}{q};$$

et la première des deux valeurs de R ci-dessus, j'ai

$$(A - 2p)q^2 = (C - Bp + Ap^2 - p^3)q - E;$$

avec ces deux valeurs de q^2, j'obtiens

$$q = \frac{(A-2p)(D - Cp + Bp^2 - Ap^3 + p^4) - E}{(A-2p)(B-2Ap+3p^2) - (C - Bp + Ap^2 - p^3)}.$$

On conclut de-là immédiatement les deux quasi-valeurs extrêmes de q.

248.

$$q_1 > \frac{(A-2\varpi)(D-C\varpi+B\varpi^2-A\varpi^3+\varpi^4)-E}{(A-2\varpi)(B-2A\varpi+3\varpi^2)-(C-B\varpi+A\varpi^2-\varpi^3} = > v.$$

$$q_{10} < \frac{(A-2\varphi)(D-C\varphi+B\varphi^2-A\varphi^3+\varphi^4)-F}{(A-2\varphi)(B-2A\varphi+3\varphi^2)-(C-B\varphi+A\varphi^3-\varphi^4} = < w.$$

Pour avoir la valeur de $k\varpi$ et $k\varphi$, ou la quasi-valeur complète de p_1 et p_{10}, je prends une direction opposée en commençant par la dernière équation auxiliaire de 5 et 4, j'ai

$$Q = \frac{Dq - Ep}{q^2},$$

d'où

(3) $Ep^2 = (D - q^2)pq + Eq - Cq^2 + Aq^3$,

de 2 et 4,

$$qp^2 = (Aq^2 - E)p + q^3 - Bq^2 + Dq;$$

avec ces deux équations on a

$$p = \frac{Eq(D-Bq) + q^4(C-Aq)}{E(E-Aq^2) + q^3(D-q^2)},$$

d'où l'on conclut

249.

$$p_1 > \frac{Ev(D-Bv) + v^4(C-Av)}{E(E-Av^2) + v^3(D-v^2)} = > k\varpi.$$

$$p_{10} < \frac{Ew(D-Bw) + w^4(C-Aw)}{E(E-Aw) + w^3(D-w^2)} = < k\varphi.$$

250. Il faut remarquer que dans la résolution des équations du quatrième degré, la

dernière combinaison des racines p, où la quasi-valeur de p_6 se confond avec Π, et celle de q_6 avec la quasi-valeur de Q, voilà pourquoi il n'en a pas été question. Au lieu que dans le cinquième degré Π appartient à la somme des trois plus grandes racines, et Φ à la somme des trois plus petites, et ne font pas partie des combinaisons des racines deux à deux ; il en est de même des quasi-valeurs de Q. La même observation a lieu pour les degrés plus élevés.

Pour appliquer ceci à un exemple, soit l'équation

$$x^5+15x^4+85x^3+225x^2+274x+120=0,$$

qui a pour facteurs

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=0,$$

j'ai

$\varpi=2,53$.................... $\nu=1,8$,
$k\varpi=2,8$.

Les mêmes formules servent à la concentration ; les valeurs de $k\varpi$ iront en croissant jusqu'à la valeur de p_1 ; si je fais

$k\varpi=3,1$.................... $\nu=2,079$,
$k'\varpi=3,085$.

Ainsi, si l'on dépasse la valeur de p_1, on aboutit, par une série opposée de concentration, à la vraie valeur qui est $=3$.

Je ne m'occupe pas de la concentration de φ, ou de la somme des deux plus grandes racines. Les formules de concentration renferment implicitement des fonctions de $B - \Phi\varphi$, comme on peut s'en assurer, et, par cette raison, elles renferment toutes les variations qui sont produites par la relation de Φ à φ, comme dans la concentration des quasi-valeurs des racines simples.

Ce qu'on a dit ci-dessus, pour la résolution des équations du quatrième degré en facteurs doubles, s'applique également aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs.

TROISIÈME SECTION.

De la résolution des équations du sixième degré.

251. Soit l'équation générale

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0;$$

je la décompose en ces deux facteurs :

$$(x^2 + px + q)(x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S) = 0;$$

en la recomposant, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + Px^5 + Qx^4 + Rx^3 + Sx^2 \\ \quad + px^5 + Ppx^4 + Qpx^3 + Rpx^2 + pSx \\ \qquad + qx^4 + qpx^3 + Qqx^2 + qRx + Sq \end{array}\right\} = 0.$$

D'où j'ai les équations auxiliaires,

$$A = P + p \ldots\ldots 1.$$
$$B = Q + q + Pp \ldots\ldots 2.$$
$$C = R + Qp + qP \ldots\ldots 3.$$
$$D = S + Rp + Qq \ldots\ldots 4.$$
$$E = pS + qR \ldots\ldots 5.$$
$$F = Sq \ldots\ldots 6.$$

et les deux inéquations

$$q > \tfrac{1}{4}p^2 \ldots\ldots 1.$$
$$Q > \tfrac{3}{8}P^2 \ldots\ldots 2.$$

Des équations auxiliaires 1, 2 et de l'inéquation 2, j'ai

$$q > \tfrac{1}{8}(5P^2 - 8AP + 8B),$$

et de l'inéquation 1,

$$q < \tfrac{1}{4}(A^2 - 2AP + P^2);$$

d'où j'obtiens les quasi-valeurs originelles,

$$P < \tfrac{1}{3}(2A + \sqrt{2(5A^2 - 12B)}) = < \Pi,$$
$$P > \tfrac{1}{3}(2A - \sqrt{2(5A^2 - 12B)}) = > \Phi.$$

252. D'où

$$p_1 > \tfrac{1}{3}(A - \sqrt{2(5A^2 - 12B)}) = > \varpi,$$
$$p_{15} < \tfrac{1}{3}(A + \sqrt{2(5A^2 - 12B)}) = < \varphi.$$

Pour obtenir la quasi-valeur de q, j'ai d'abord avec les équations auxiliaires,

2.... $Q = B - Pp - q$.
2 et 3.. $R = C - Pq - p(B - Pp - q)$.
2.3.4.. $S = D - p[C - Pp - p(B - Pp - q)] - q(B - Pp - q)$.
3.5.. $S = E - q\frac{[C - Pp - p(B - Pp - q)]}{p}$.
6... $S = \frac{F}{q}$.

Les deux premières valeurs de S me donnent l'équation, en substituant la valeur de

$$P = A - p,$$

$$\left.\begin{array}{l}(A - 3p)q^2 - (C - 2Bp + 3Ap^2 - 4p^3)q \\ + (E - Dp + Cp^2 - Bp^3 + Ap^4 - p^5)\end{array}\right\} = 0. \quad (A)$$

La première et la troisième valeur de S donnent l'autre équation,

$$\left.\begin{array}{l}q^3 - (3p^2 - 2Ap + B)q^2 \\ + (p^4 - Ap^3 + Bp^2 - Cp + D)q - F\end{array}\right\} = 0. \quad (B)$$

ou plus simplement

$$\alpha q^2 - \beta q + \gamma = 0. \quad (A)$$
$$q^3 - \alpha' q^2 + \beta' q - F = 0. \quad (B)$$

On tire de ces deux équations celle-ci:

$$(\alpha\alpha' - \beta)q^2 + (-\alpha\beta' + \gamma)q + \alpha F = 0.$$

En la combinant avec la première (A), on a l'équation définitive, que je transforme immédiatement dans l'inéquation,

253. $$q > \frac{\alpha(\alpha'\gamma - \alpha F) - \beta\gamma}{\alpha(\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma) - \beta^2} = > \nu;$$

en mettant à la place de p la quasi-valeur ϖ, et l'on a, pour arriver à cette quasi-valeur de ν, les équations préliminaires,

$\alpha = A - 3\,\varpi.$

$\beta = C - 2\,B\varpi + 3\,A\,\varpi^2 - 4\,\varpi^3.$

$\gamma = F - D\varpi + C\varpi^2 - B\varpi^3 + A\,\varpi^4 - \varpi^5.$

$\alpha' = B - 2\,A\,\varpi + 3\,\varpi^2.$

$\beta' = D - C\,\varpi + B\,\varpi^2 - A\,\varpi^3 + \varpi^4.$

Je vais maintenant compléter ϖ en fonctions de la quasi-valeur ν; pour cela j'employe les équations auxiliaires, dans un sens opposé à celui que j'ai pris pour avoir la quasi-valeur ν. Ainsi j'ai

avec $6\ldots\ldots S = \dfrac{F}{q}.$

$6.5\ldots R = \dfrac{Eq - pF}{q^2}.$

$6.5.4.\,.\;Q = \dfrac{Dq^2 - Fq - Epq + Fp^2}{q^3} \ldots\ldots 1.$

$6.5.3.1\ldots Q = \dfrac{Cq^2 - Eq + pF - Aq^3 + pq^3}{pq^2} \ldots 2.$

$2\ldots\ldots Q = B - Ap + p^2 - q \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$

De la première et de la deuxième valeur de Q, on a

$$Fp^3 = Eq\cdot p^2 + (2Fq - Dq^2 + q^4)p - (Eq^2 - Cq^3 + Aq^4).$$

De la deuxième et de la troisième valeur de Q,

on a

$$p^3=\mathrm{A}p^2+\left(\frac{\mathrm{F}-\mathrm{B}q^2+2q^3}{q^2}\right)p-\left(\frac{\mathrm{E}q-\mathrm{C}q^2+\mathrm{A}q^3}{q^2}\right).$$

De ces deux dernières équations, on a

$$(\mathrm{AF}-\mathrm{E}q)\,p^2=$$
$$\left(\frac{q^6-\mathrm{D}q^4+\mathrm{BF}q^2-\mathrm{F}^2}{q^2}\right)p+\left(\frac{(\mathrm{F}-q^3)(\mathrm{E}q-\mathrm{C}q^2+\mathrm{A}q^3)}{q^2}\right)$$

Ensuite de la première et de la troisième valeur de Q, on a

$$(\mathrm{F}-q^3)p^2=(\mathrm{E}q-\mathrm{A}q^3)p+\mathrm{F}q-\mathrm{D}q^2+\mathrm{B}q^3-q^4.$$

En combinant ces deux dernières équations et mettant ϖ à la place de p, on a enfin la quasi-valeur complète de p_1,

254.

$$p_1>\frac{\nu^3(\mathrm{AF}-\mathrm{E}\nu)(\mathrm{F}-\mathrm{D}\nu+\mathrm{B}\nu^2-\nu^3)-(\mathrm{F}-\nu^3)^2(\mathrm{E}\nu-\mathrm{C}\nu^2+\mathrm{A}\nu^3)}{(\mathrm{F}-\nu^3)(\nu^6-\mathrm{D}\nu^4+\mathrm{BF}\nu-\mathrm{F}^2)-\nu^3(\mathrm{AF}-\mathrm{E}\nu)(\mathrm{E}-\mathrm{A}\nu^3)}$$

On peut, pour la facilité du calcul, la présenter sous cette forme :

$$p_1>\frac{\nu^3(\mathrm{AF}-\mathrm{E}\nu)(\mathrm{F}-\mathrm{D}\nu+\nu^2(\mathrm{B}-\nu))-(\mathrm{F}-\nu^3)^2\nu[\mathrm{E}-\nu(\mathrm{C}-\mathrm{A}\nu)]}{(\mathrm{F}-\nu^3)[\nu^4(\nu^2-\mathrm{D})+\mathrm{F}(\mathrm{B}\nu^2-\mathrm{F})]-\nu^3(\mathrm{AF}-\mathrm{E}\nu)(\mathrm{E}-\mathrm{A}\nu^3)}$$

Il s'agit de vérifier ces formules par des exemples, je me bornerai à la résolution de l'équation

$$x^6+21x^5+175x^4+735x^3+1624x^2+1764x+720=0,$$

dont les facteurs sont

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=0;$$

j'ai d'abord

$$\varpi = 2{,}1707,$$
$$\Pi = 18{,}8293,$$
$$\varphi = 11{,}8293,$$
$$\Phi = 9{,}1707;$$

puis de $\varpi = 2{,}2$.......... j'ai $\nu = 1{,}7125$,
$= 1{,}8$.

d'où $k\varpi = 2{,}7833$.

Ces mêmes formules servent pour la concentration, et on voit, par la valeur de $k\varpi$, qu'elles doivent converger vers la vraie valeur de la première combinaison $= 3$.

Et si l'on donnait à $k\varpi$ une valeur qui dépassât la vraie, alors la série ramenerait vers elle par une direction contraire ; car si je fais

$k\varpi = 3{,}1$.......... j'ai $k\nu = 2{,}0681$,
d'où $k'\varpi = 3{,}0717$.

On voit que la série ramène, en sens contraire, à la valeur de la première combinaison $= 3$.

On décomposera ainsi toute équation du sixième degré en facteurs doubles réels, soit que les racines soient réelles ou imaginaires. Dans le cas où la première paire de racines serait composée d'une racine réelle et d'une imaginaire, la série de concentration aboutirait à la deuxième combinaison, qui serait composée de deux racines imaginaires, et dont

les coëfficiens seraient réels. Mais comme il faudrait franchir un certain nombre de termes dans la série de concentration, et qu'il en résulterait un calcul fastidieux et assez long, on peut éviter cet inconvénient en décomposant l'équation en deux facteurs du troisième degré ; la première combinaison contiendra une racine réelle et la paire de racines imaginaires, ses coëfficiens seront donc réels.

QUATRIEME SECTION.

255. *De la décomposition des équations en facteurs du troisième degré.*

Je décompose l'équation générale

$$x^6 + A\,x^5 + \text{etc.}$$

en ces deux facteurs :

$$(x^3+Px^2+Qx+R)\,(x^3+px^2+qx+r)=0\,;$$

en la recomposant, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x^6+Px^5+\ Qx^4+\ Rx^3 \\ \quad +px^5+Ppx^4+Qpx^3+Rpx^2 \\ \qquad +\ qx^4+Pqx^3+Qqx^2+Rqx \\ \qquad\qquad +\ rx^3+Prx^2+Qrx+Rr \end{array}\right\}=0;$$

d'où l'on a les équations auxiliaires,

$$A = P + p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

$$B = Q + Pp + q \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

$$C = R + Qp + Pq + r \ldots\ldots\ldots 3.$$
$$D = Rp + Qq + Pr \ldots\ldots\ldots 4.$$
$$E = Rq + Qr \ldots\ldots\ldots 5.$$
$$F = Rr \ldots\ldots\ldots 6.$$

Puis les deux inéquations

$$Q < \tfrac{1}{3}P^2 \ldots\ldots\ldots 1.$$
$$q < \tfrac{1}{3}p^2 \ldots\ldots\ldots 2.$$

Avec la deuxième équation et la première inéquation, j'ai d'abord

$$q > \tfrac{1}{3}(2P^2 - 3AP + 3B);$$

et avec la deuxième inéquation

$$q < \tfrac{1}{3}(A^2 - 2AP + P^2),$$

on a

$$A^2 - 2AP + P^2 > 2P^2 - 3AP + 3B;$$

d'où l'on tire

$$P < \tfrac{1}{2}(A + \sqrt{5A^2 - 12B}) = < \pi.$$
$$P > \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{5A^2 - 12B}) = > \varpi.$$

La première de ces deux quasi-valeurs appartient à la somme des trois plus grandes racines, et la deuxième à la somme des trois plus petites.

En appliquant ces formules à l'exemple ci-dessus, on a

$$\pi = 15{,}6234,$$
$$\varpi = 5{,}3766;$$

les vraies valeurs sont :

$$P = 15 \text{ et } p = 6.$$

Pour avoir les quasi-valeurs de q et de r, on suivra une marche semblable à celle qu'on a tenue, par les différentes équations qu'on obtiendra, on fera disparaître les différentes puissances de q, et l'on aura sa quasi-valeur en fonctions de ϖ; puis celle de r. Il sera aisé ensuite de compléter ϖ en fonctions de ces deux dernières quasi-valeurs.

Il en serait de même des équations des degrés plus élevés, s'il ne se trouve pas de jointures pour décomposer une équation du septième, du huitième degré, etc., en facteurs du deuxième ; c'est-à-dire si la séparation que l'on veut faire tombe entre les deux racines imaginaires ; alors on la décompose en facteurs du troisième degré, et alors la séparation qu'on veut faire rencontre nécessairement une jointure ; c'est-à-dire qu'on peut trouver pour les facteurs des coëfficiens qui sont tous réels.

En résumant tout ce qui précède, on voit qu'il n'y a aucune équation, quelle que soit sa nature, et quel que soit son degré, qui ne puisse être résolue de plusieurs manières par le calcul des inéquations.

256. Indépendamment des méthodes de concentration qui ont été développées., on peut, dans toutes les méthodes de solution qui ont été exposées, s'arrêter aux quasi-valeurs complètes que donnent les formules ; puis avec la quasi-valeur de la première racine qu'on aura obtenue (en l'appelant a), faire

$$x = a + y,$$

et transformer l'équation proposée en y, la résoudre par les mêmes formules, on obtiendra la quasi-valeur a' de la valeur de y ; et en faisant

$$y = a' + z,$$

on obtiendra la quasi-valeur de z, et ainsi de suite.

Mais, en général, il faut observer que pour tout mode de solution quelconque, quand on ne se borne pas aux quasi-valeurs originelles, et pour concentrer d'après les méthodes précédentes, il faut que l'équation soit transformée de manière à avoir toutes les racines du même signe, ce qu'on peut toujours faire, comme on l'a vu.

CHAPITRE VIII.

Principe de l'inégalité des racines.

257. Après avoir exposé les différentes méthodes de décomposer les équations, il est à propos de terminer cette première partie par l'analyse du principe qui constitue l'inégalité des différentes racines qui entrent dans la composition d'une équation.

On démontre que toute équation composée de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + Mx + N = 0,$$

est décomposable en autant de facteurs

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+\text{etc}\ldots),$$

qu'il y a de valeurs ou de racines a, b, c, d, etc. qui peuvent satisfaire également à l'équation. Toute la théorie qu'on vient de développer repose sur ce fait analytique.

Maintenant que signifient ces différentes valeurs, doit-on dire qu'elles appartiennent toutes également à l'inconnue x ? Il arrive quelquefois qu'elles satisfont également à la question que l'on veut résoudre ; mais il arrive aussi souvent qu'une seule convient au pro-

blême qu'on a traduit en algèbre, et que les autres lui sont incompatibles.

On demande, par exemple, quel est le nombre qui, retranché treize fois de son cube, donne douze pour reste. La question traduite en algèbre, est

$$x^3 - 13x = 12.$$

Je trouve les trois valeurs

$$x = 4, \; x = -1, \; x = -3,$$

qui satisfont également à la question ; elles sont donc dans ce cas toutes les trois vraies.

Mais voici un autre exemple où le contraire a lieu. On propose de déterminer quelle serait la hauteur FD d'un segment sphérique (fig. 1re.), dont la solidité serait $= 8{,}3376$, et qui appartiendrait à une sphère dont le rayon serait $= 3$.

Je fais la hauteur FD de ce segment $= x$, le rayon de la sphère $= r$, je prends la solidité du secteur

$$\text{CABD} = \tfrac{2}{3} c r^2 x,$$

(c représente le rapport du diamètre à la circonférence), et je le retranche du cône CAB, qui ayant pour rayon de sa base l'expression

$$\sqrt{2rx - x^2},$$

a pour son volume

$$c\left(2rx - x^2\right)\left(\frac{r-x}{3}\right);$$

d'où j'ai

$$\tfrac{2}{3}cr^2x - \tfrac{1}{3}c(2rx - x^2)(r-x) = 8,3776;$$

d'où j'ai l'équation

$$x^3 - 9x^2 + 8 = 0.$$

Il en résulte les trois valeurs

$$x = 1,$$
$$x = 8,898989899,$$
$$x = -0,898989899,$$

dont la première est la seule vraie, et les deux autres sont évidemment fausses et contradictoires à la question proposée ; car en mettant l'une ou l'autre de ces deux dernières valeurs dans l'expression du rayon de la base du cône

$$= \sqrt{2rx - x^2},$$

elle devient imaginaire.

258. D'où vient donc la différence de ces deux espèces de problêmes, et de ces deux espèces de solutions ? Le voici : Quand on propose ce problême général : *Quel est le nombre qui, retranché treize fois de son cube, donne douze pour reste ?* et autres du même genre, on ne considère que l'inconnue toute seule sans aucune relation avec d'autres quantités

connues ; mais seulement relativement au produit qu'elle peut donner étant combinée d'une certaine manière. C'est toujours cette inconnue dont les différentes puissances sont ajoutées ou retranchées un certain nombre de fois. Cette sorte de problème n'est autre chose que la traduction française et littérale d'une équation ramenée a la forme

$$x^m + A\,x^{m-1} + \text{etc.} = 0.$$

Mais ce n'est pas là le but ultérieur auquel tend l'analyse. Il s'agit toujours de trouver le rapport d'une quantité que l'on ne connaît pas à d'autres quantités que l'on connaît d'après les différentes conditions qui font la nature du problême, et qui déterminent la forme de l'équation qu'on a à résoudre.

Ainsi, dans le deuxième problême ci-dessus, je veux savoir quelle est la hauteur du segment dont le volume

$$= 8{,}3376\,;$$

c'est-à-dire que je veux savoir son rapport avec le rayon $= 3$, je fais cette inconnue x, et je la lance dans le labyrinthe d'une équation ; voici la réponse que j'en obtiens : *Ajoutez huit au cube de l'inconnue et retranchez-en neuf fois son carré, il ne vous restera rien ;*

ou en parlant algèbre,

$$x^3 - 9x^2 + 8 = 0.$$

Voilà précisément la réponse d'un oracle. C'est la seule réponse que la méthode des équations peut faire, elle ne peut parler plus clairement.

Or, maintenant, il y a deux choses à débrouiller dans cette réponse, 1°. le sens littéral; 2°. le sens vrai. Le sens littéral qu'on appelle le sens général, consiste à chercher quel est le nombre qui satisfait simplement à l'équation. Sous ce point de vue il n'est plus question du rapport de l'inconnue au rayon de la sphère, il n'est question que de savoir quel est le nombre tel qu'en retranchant neuf fois son carré de son cube, on ait — 8 pour reste. On trouve trois nombres qui ont cette propriété, et, en s'arrêtant à ce sens, l'équation a vraiment trois valeurs que j'appellerai valeurs d'équation.

Mais en remontant au vrai sens du problême, dont l'équation n'est que la traduction en langue algébrique, il est clair qu'il n'y a qu'une seule valeur vraie, et que les autres sont fausses. Cette valeur vraie peut être réelle ou imaginaire, selon la possibilité ou l'impossibilité de la question qu'on veut résoudre. Ainsi, si j'avais établi le problême à

résoudre de cette manière : *Trouver la hauteur d'un segment d'une sphère dont le rayon* $= 3$, et telle que la *solidité de ce segment*

$$= 1000,$$

on voit tout de suite que le problème est impossible et absurde : l'équation qu'on obtiendrait serait

$$x^3 - 9x^2 + 954,8 = 0,$$

qui contiendrait alors deux racines imaginaires, et une réelle qui est à peu près

$$x = -7,6,$$

et qui est cependant évidemment fausse. En s'arrêtant au sens littéral de l'équation, on devrait conclure que cette valeur réelle est celle qui convient à la question ; tandis, qu'au contraire, ce sont les racines imaginaires qui lui appartiennent.

259. Il s'agit d'analyser le principe qui mêle et confond avec la valeur que l'on cherche ces valeurs vagues ou générales qui lui sont étrangères. Je considère d'abord l'équation en remontant à l'origine qui l'a formée ; c'est-à-dire comme une expression algébrique qui désigne la manière dont l'inconnue x est combinée avec les autres quantités connues du problème. Sous ce point de vue qui restreint l'équation à n'exprimer que la valeur du problème, elle

ne contient de valeur vraie que celle qu'on y a mise. Il suit de-là que le produit des facteurs

$$(x+a)(x+b)(x+c) \text{ etc.}$$

dont se trouve formée l'équation par son résultat, ne contient qu'un seul facteur qui soit $=$o. Je suppose que ce soit le premier facteur

$$x+a,$$

il s'ensuit que l'on aura pour les autres,

$$x+b=\delta,$$
$$x+c=\delta',$$
$$x+d=\delta'' \text{ etc.}$$

ou

$$x+a=0,$$
$$x+a+\delta=\delta,$$
$$x+a+\delta'=\delta' \text{ etc.}$$

et que par conséquent l'équation doit être ramenée à ce mode de composition :

$$\left.\begin{array}{l}(x+a)\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \times(x+a+\delta)\ldots\ldots\\ \times(x+a+\delta')\ldots\ldots\\ \times(x+a+\delta'')\ldots\ldots\\ \text{etc.}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}0.\\ \times\delta.\\ \times\delta' \quad (A).\\ \times\delta''.\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

En égalant le produit des premiers membres à celui des deuxièmes, cette équation équivaut à

$$(x+a)(x+b)(x+c)(\text{etc}\ldots\ldots=0.$$

Dans cette dernière équation il y a autant de valeurs que de facteurs, parce que l'on attribue à chacun de ces facteurs indifféremment la valeur o qui est dans le deuxième membre, tandis qu'elle ne convient qu'à un seul, et que chacun des autres facteurs

$$x + b,$$
$$x + c,$$
$$x + d \text{ etc.}$$

ou

$$x + a + \delta,$$
$$x + a + \delta',$$
$$x + a + \delta'' \text{ etc.}$$

répond dans le deuxième membre aux différentes quantités δ, δ', δ'', etc. qui sont multiples de zéro, et qui, par les règles de l'algèbre, ont disparu de l'équation.

Or, je dis que c'est de cette manière que se forme la multiplicité des valeurs que donne une équation composée, et que c'est là le principe de l'*amphibologie* du langage algébrique : c'est ce qu'il s'agit de développer.

Pour le faire voir, je fais d'abord avec la seule valeur $x = 1$ les trois équations

$$x + 1 = 2,$$
$$x + 2 = 3,$$
$$x + 3 = 4,$$

qui n'expriment toujours que la même valeur, mais d'une manière différente. Je forme une équation avec le produit des trois premiers membres que j'égale à celui des seconds, et j'ai

$$(x+1)(x+2)(x+3)=2\times3\times4,$$

ou bien

$$x^3+6x^2+11x-18=0.$$

Cette équation est divisible par le facteur

$$x-1=0,$$

qui appartient à la valeur que j'ai introduite

$$x=1.$$

Il reste pour quotient

$$x^2+7x+18.$$

Dans ce cas aucune valeur supposée à x ne peut rendre son résultat $=0$; ainsi, cette équation du troisième degré ne contient que la seule valeur introduite $x=1$, et les deux autres sont imaginaires. Mais ce cas dépend uniquement des valeurs de combinaison que j'ai employées pour former les trois équations composantes.

Si je forme de même une équation composée ayant pour base la même valeur $x=1$, exprimée des trois manières suivantes :

$$x+1=2,$$
$$x+2=3,$$
$$x-3=-2,$$

j'aurai l'équation

$$x^3-7x+6,$$

qui donne d'abord la valeur introduite $x=1$, puis les deux autres

$$x=2,$$
$$x=-3,$$

qui ne se trouvent pas dans les équations composantes ; ces deux valeurs résultent donc de l'opération qui a été faite, on peut donc déjà conclure delà que,

260. *Toutes les fois que l'on forme une équation composée entre le produit des premiers membres et celui des seconds d'un nombre quelconque d'équations simples*,

$$x+p=q,$$
$$x+p'=q',$$
$$x+p''=q'', \text{ etc.}$$

appartenant toutes à la même valeur, et dont le membre qui contient l'inconnue forme dans chacune un binôme ; il en résultera une équation composée, qui, par le fait de cette multiplication, sera susceptible d'être satisfaite par autant de valeurs réelles ou imaginaires qu'il y a d'équations simples composantes :

et parmi lesquelles se trouvera toujours la valeur vraie qui a servi de base à l'équation composée.

261. En analysant directement une équation composée, je retrouve le même principe de composition; soit, par exemple, l'équation générale du quatrième degré,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

je suppose que la vraie valeur qui sert de base à cette équation soit

$$x = -a \text{ ou } x + a = 0,$$

je la dispose ainsi :

$$(x^3 + Ax^2 + Bx + C)x = -D,$$

je divise le premier membre par x, le deuxième par sa valeur $= -a$, j'ai

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C \ldots\ldots = \frac{D}{a},$$

puis

$$(x^2 + Ax + B)x \ldots\ldots = -C + \frac{D}{a};$$

je divise encore le premier membre par x, le deuxième par $-a$, j'ai

$$x^2 + Ax + B \ldots\ldots = -\left(\frac{Ca + D}{a^2}\right),$$

puis

$$(x+A)x\ldots\ldots = -B-\left(\frac{Ca+D}{a^2}\right);$$

je divise encore de même, j'ai

$$x+A\ldots\ldots = \frac{Ba^2+Ca+D}{a^3},$$

puis

$$x\ldots\ldots = -A\ \frac{+Ba^2+Ca+D}{a^3};$$

en divisant encore de même, j'ai

$$1=-\left(\frac{Aa^3+Ba^2+Ca+D}{a^4}\right),$$

équation identique, car elle donne immédiatement

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=0.$$

J'ai successivement décomposé l'équation en la divisant par

$$x=-a,$$

quatre fois, et je n'ai pas trouvé d'autres valeurs ; en voici la raison : c'est qu'à chaque division j'ai transposé dans le deuxième membre successivement D, C, B, A ; c'est-à-dire qu'à chaque fois j'ai ôté le principe qui constitue des valeurs différentes dans l'équation ; car, avant chaque transposition, le premier membre

$$Xx+D,$$

puis

$$X'x + C,$$

puis etc., formait un binôme, et, après la transposition, il ne restait plus que x affecté du coëfficient X.

On en sentira encore mieux la raison, si on recompose l'équation à partir de la dernière division

$$x = -\left(\frac{A + Ba^2 + Ca + D}{a^3}\right);$$

en transposant A dans le premier membre et multipliant d'un côté par x, et d'un autre par $-a$, j'ai l'équation

$$(x + A)x = -B - \frac{Ca + D}{a^2},$$

dont le premier membre contient un binôme, qui, par cette raison, est susceptible de donner deux valeurs différentes. En transposant C de même dans le premier membre, j'y introduirai un nouveau binôme, et ainsi de suite.

Soit pour exemple l'équation numérique du troisième degré,

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0,$$

qui peut être satisfaite par trois valeurs différentes,

$$x = -1,$$
$$x = -2,$$
$$x = -3.$$

Si je le divise par son facteur

$$x + 1 = 0,$$

il me restera pour quotient

$$x^2 + 5x + 6,$$

qui contient les deux autres facteurs

$$(x + 2)(x + 3);$$

mais en disposant cette équation de cette manière :

$$(x^3 + 6x^2 + 11)x = -6,$$

pour la diviser par l'équation

$$x = -1,$$

chaque membre par son correspondant comme ci-dessus, j'ai

$$x^2 + 6x = -5.$$

Si je m'arrête là, j'ai une équation du deuxième degré qui me donne les deux valeurs

$$x = -1,$$
$$x = -5,$$

différentes de celles contenues dans l'équation

$$x^3 + 6x^2 \text{ etc.} = 0,$$

et ces deux valeurs différentes proviennent

encore de ce que le premier membre

$$x(x+6),$$

contient le binôme $x+6$. En divisant encore par

$$x=-1,$$

et transposant, il reste

$$x=-1,$$

262. Ce premier apperçu fait voir par la synthèse et par l'analyse, que le principe de l'inégalité des racines des équations composées provient de ce qu'elles ont été formées par le produit de plusieurs équations simples, exprimant la même valeur, multipliée membre par membre; mais dans lesquelles l'inconnue fait dans un des membres un binôme avec une quantité additionnelle. Cette formation se voit manifestement dans l'opération de l'élimination quand les inconnues sont multipliées l'une par l'autre. Soient, par exemple, les deux équations

$$ax+by=c,$$
$$gxy+hy=p;$$

si je substitue dans la deuxième la valeur de y, prise dans la première, j'aurai

$$\left(\frac{c-ax}{b}\right)\left(gx+h\right)=p.$$

Le premier membre est le produit de deux

binômes, ce qui donnera deux valeurs différentes.

Ainsi c'est la combinaison du système multiple, avec le système additionnel, qui produit les *amphibologies* du langage algébrique.

263. Outre ce principe de variété dans les racines, il en est un autre qui appartient au système multiple.

Si, par exemple, avec l'équation

$$xyz = p,$$

j'ai les deux autres

$$x = y + m,$$
$$x = z + n,$$

j'aurai en substituant

$$x^3 - (m+n)x^2 + mnx - p = 0;$$

d'où il résultera trois valeurs différentes, parce que les valeurs de y et de z, qu'on a substituées, formaient un binôme.

Mais si avec la même équation

$$xyz = p,$$

j'ai

$$x = my,$$
$$x = nz,$$

j'aurai par la substitution

$$x^3 = mnp,$$

qui ne me donne réellement qu'une valeur

$$x = \sqrt[3]{mnp},$$

qui puisse satisfaire à l'équation : on en aurait deux si le nombre des inconnues était pair ; ces deux auraient la même valeur, mais auraient un signe différent ; cette duplicité de signes naît de l'équivoque de toute puissance paire qui peut toujours avoir sa racine négative ou positive.

Ainsi, toutes les fois que les différentes inconnues d'un problême ne différeront que par le système multiple, ou seront en raison multiple les unes par rapport aux autres, l'élimination aboutira à une équation qu'on appelle à deux termes, de la forme

$$x^m = p \text{ ou } x^m = a^m,$$

qu'on peut considérer formées par la multiplication des équations simples

$$x = a, \ x = a, \text{ etc.},$$

membre par membre ; elles n'ont d'autre principe de multiplicité de racines que l'équivoque du quarré, et ne peuvent par conséquent avoir qu'une racine de plus que la vraie qui lui est égale en nombre, et avec un signe contraire. Sa solution appartient immédiatement à la méthode d'extraction.

En divisant $x^m - a^m$ par $x - a$, on a pour quotient

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots\ldots + a^{m-1},$$

qui ne peut pas former une équation quand m est impair. En le faisant $= 0$, on commet une erreur, parce qu'aucune valeur ne peut être supposée à x qui puisse donner ce résultat; aussi, en résolvant ces espèces d'équations, on n'obtient que des racines imaginaires qui apprennent l'erreur qu'on a commise.

Le résultat de l'équation déterminant x à ne valoir que a, ce quotient

$$x^{m-1} + ax^{m-2}, \text{ etc.},$$

qu'on obtient, ne peut valoir que ma^{m-1}, et l'équation $x^m = a^m$, équivaut à

$$ma^{m-1}(x - a) = 0,$$

si m est impair; et à

$$\tfrac{1}{2}ma^{m-2}(x^2 - a^2) = 0,$$

si m est pair.

264. En général, toutes les combinaisons et toutes les opérations dont peut être susceptible un problême quelconque, se rapportent au systême additionnel et au systême multiple; c'est-à-dire aboutissent à des additions et des soustractions, à des multiplications et des divisions.

1°. Si les inconnues n'éprouvent entr'elles aucune opération multiple, l'équation finale qui en résulte est du premier degré; on n'a qu'une valeur pour chaque inconnue, c'est la vraie et elle a toujours le signe qui lui convient d'après la nature du problême;

2°. Si elles n'éprouvent entr'elles que des opérations multiples, le résultat de l'équation finale ne présente que deux valeurs égales; mais de signe différent, seulement quand la puissance est paire, et cette *amphibologie* naît de l'équivoque du quarré;

3°. Si les inconnues sont combinées avec des quantités additionnelles et qu'elles soient multiples les unes des autres avec cette combinaison, il en résulte une équation finale qui contient différentes valeurs inégales, parmi lesquelles est confondue celle qui appartient à la résolution du problême que l'on cherche. Ainsi la cause de la multiplicité des racines dans les équations composées se ramène à deux principes, le principe additionnel et le principe multiple.

265. Pour éclaircir et rendre manifeste cette théorie, il est nécessaire d'analyser la manière dont les principes d'inégalité des racines agissent dans la composition et la décomposition des équations.

Je commence par l'équation du deuxième degré que je compose avec les quantités additionnelles de la manière suivante :

$$x + a + p = p,$$
$$x + a + q = q.$$

En multipliant les premiers membres entr'eux et en les égalant au produit des seconds, j'ai par la transposition de tous les termes dans le premier membre et par la réduction après la la multiplication faite,

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2ax + a^2 \\ \quad + px + pa \\ \quad + qx + qa \end{array}\right\} = 0 \ \text{(B)}.$$

Cette équation est divisible par $x + a$, et équivaut à

$$(x + a)(x + a + p + q) = 0.$$

En considérant cette équation comme un résultat d'analyse, et indépendamment de son origine que l'on connaît, il n'y aura pas plus de raison de dire que c'est le facteur $x + a$, qui rend l'équation $= 0$ plutôt que l'autre, alors on a l'une ou l'autre de ces deux valeurs

$$x = -a,$$
$$x = -a - p - q;$$

mais comme on connaît ici l'origine de cette équation, on sait que c'est le facteur $x + a$

qui la rend $=0$, et que, par conséquent l'autre facteur

$$x+a+p+q,$$

se réduit à $p+q$, précisément parce que

$$x+a=0;$$

de sorte que l'équation se réduit à

$$(p+q)(x+a)=0,\ =0\times(0+p+q).$$

On voit alors que l'équation doit être décomposée comme on l'a avancé ci-dessus (A) (259),

$$\left.\begin{matrix}(x+a)\ldots\ldots\\ \times(x+a+p+q)\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}0,\\ \times p+q.\end{matrix}\right.$$

De sorte que le deuxième facteur

$$x+a+p+q,$$

n'exprime toujours que la même valeur

$$x=-a,$$

ayant égard au facteur $p+q$ du deuxième membre qui lui correspond ; car l'on a

$$x+a+p+q=p+q,$$

d'où

$$x=-a.$$

Si je divise l'équation B membre par membre, le premier par x, le deuxième par sa valeur $-a$ en la disposant ainsi :

$$\left.\begin{matrix}x^2+2ax\\ +\ px\\ +\ qx\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}-a^2,\\ -pa,\\ -qa,\end{matrix}\right.$$

j'aurai

$$\left.\begin{array}{r} x+2a \\ +\ p \\ +\ q \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +a, \\ +p, \\ +q. \end{array}\right.$$

Dans ce cas je ne trouve pour quotient que

$$x = -a,$$

parce que les quantités $p+q$ qui étaient combinées avec

$$x = -a,$$

s'en trouvent dégagées, et qu'elles disparaissent par la réduction algébrique.

Si je divisais la même équation par l'autre valeur

$$x = -a-p-q,$$

et de la même manière, j'aurais

$$x+2a+p+q = a,$$

d'où

$$x = -a-p-q,$$

et je ne trouverais que cette valeur ; dans ce cas j'aurais attribué zéro du deuxième membre

$$o.(p+p),$$

au facteur

$$x+a+p+q,$$

plutôt qu'à $x+a$; alors la seule valeur serait

$$x = -a-p-q,$$

et le facteur $x+a$ correspondrait dans le

deuxième membre à $p+q$, et l'on aurait

$$x+a=p+q,$$

d'où

$$x=-a-p-q.$$

Ainsi, si l'on ignorait lequel des deux facteurs correspond à zéro dans le deuxième membre, on verrait évidemment que c'est toujours l'un ou l'autre des deux facteurs qui est $=0$, et non pas l'un et l'autre.

266. Maintenant si je résous l'équation (B) selon la méthode ordinaire du deuxième degré, et si je la compare avec la résolution de l'équation générale

$$x^2+Ax+B=0,$$

j'aurai les deux solutions suivantes :

$$x=-a-\tfrac{1}{2}(p+q)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+2pq+q^2},$$

$$x=-\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}A^2-B},$$

d'où

$$x=-a,$$

$$x=-a-p-q.$$

On voit ici par la comparaison que la partie rationnelle $\frac{1}{2}A$ de la solution générale contient outre la valeur de la racine introduite $-a$, une fonction de quantités additionnelles, et l'on voit en même temps que le radical

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}A^2-B}$$

contient cette même fonction ; de sorte qu'un des deux signes du radical fait disparaître la fonction de quantités additionnelles contenues dans $\frac{1}{2}$A, et ne laisse plus que la vraie valeur de

$$x = -a.$$

L'autre signe du radical forme, au contraire, avec $\frac{1}{2}$A une quantité qui, outre la vraie valeur $= -a$, renferme la somme des quantités additionnelles introduites dans l'équation.

267. Je forme maintenant une équation du troisième degré de la même manière que celle du deuxième, avec

$$x + a + p = p,$$
$$x + a + q = q,$$
$$x + a + r = r,$$

j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\ \quad + \quad px^2 + 2apx + a^2p \\ \quad + \quad qx^2 + 2aqx + a^2q \\ \quad + \quad rx^2 + 2arx + a^2r \\ \qquad\qquad + pqx + apq \\ \qquad\qquad + prx + apr \\ \qquad\qquad + qrx + aqr \end{array}\right\} \begin{array}{l} (C). \\ \\ = 0. \end{array}$$

En divisant cette équation par $x + a$, j'ai pour quotient

$$\begin{aligned} x^2 &+ 2ax + a^2. \\ &+ px + ap. \\ &+ qx + aq. \\ &+ rx + ar. \\ &\quad + pq. \\ &\quad + pr. \\ &\quad + rq. \end{aligned}$$

Pour voir si ce quotient a des valeurs qui peuvent le rendre $= 0$, je le fais $= 0$, et en résolvant cette équation factice, j'ai

$$x = -a - \tfrac{1}{2}(p+q+r) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(p-q-r)^2 - 4qr}.$$

Le résultat de ces deux dernières valeurs dépend de la relation des quantités qui sont sous le radical ; elles seront réelles si l'on a

$$(p-q-r)^2 > 4qr;$$

dans le cas contraire elles seront imaginaires.

On voit que quand les équations composées sont supérieures au deuxième degré, la relation des quantités additionnelles peut donner pour les valeurs d'équation, ou pour les valeurs étrangères au problême, des racines réelles ou imaginaires.

Si la valeur introduite est incompatible avec les données du problême, on aura également des valeurs imaginaires qui appartiendront à la question ; mais la résolution de l'équation

composée n'apprendra pas si les racines imaginaires qu'elle donne appartiennent à la question, ou si elles dépendent de la relation des quantités additionnelles entr'elles.

268. Si je divise maintenant l'équation (C) par l'équation

$$x = -a,$$

membre par membre, en mettant dans le deuxième membre les quantités qui ne sont pas affectées de x, et en divisant le premier membre par x, et le deuxième par sa valeur $-a$, j'aurai

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 & +3ax & +3a^2 \\ +p & +2ap \\ +q & +2aq \\ +r & +2ar \\ & +pq \\ & +pr \\ & +qr \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +a^2. \\ +ap. \\ +aq. \\ +ar. \\ +pq. \\ +pr. \\ +qr. \end{array}\right.$$

Je transpose encore les quantités qui ne sont pas affectées de x, en faisant les réductions convenables, et je divise de nouveau comme la première fois, j'ai

$$\left.\begin{array}{l} x+3a \\ +p \\ +q \\ +r \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2a, \\ +p, \\ +q, \\ +r, \end{array}\right.$$

d'où

$$x = -a;$$

je ne rencontre encore que la valeur

$$x = -a,$$

en épuisant toutes les divisions, parce qu'à chaque fois je fais disparaître les quantités additionnelles communes aux deux membres.

269. En considérant la manière dont les équations composantes se combinent dans une équation composée, on formera avec un nombre n de ces équations intégrantes,

$$x + a + p = p,$$
$$x + a + q = q,$$
$$x + a + r = r,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x + a + \omega = \omega,$$

l'équation suivante du degré m:

$$\left.\begin{array}{llll}
x^m + max^{m-1} & + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} & + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3x^{m-3} & \ldots\ldots + a^m \\
\begin{array}{l} +p \\ +q \\ +r \\ \vdots \\ +s \end{array} & +m-1a\left\{\begin{array}{l} p \\ +q \\ +r \\ \vdots \\ +s \end{array}\right. & +m-2a^2\left\{\begin{array}{l} p \\ +q \\ +r \\ \vdots \\ +s \end{array}\right. & +a^{m-1}\left\{\begin{array}{l} p \\ +q \\ +r \\ \vdots \\ +s \end{array}\right. \\
 & \begin{array}{l} +pq \\ +pr \\ +\text{etc.} \end{array} & +m-2a\left\{\begin{array}{l} pq \\ +pr \\ +\text{etc.} \end{array}\right. & +a^{m-2}\left\{\begin{array}{l} pq \\ +pr \\ +ps \\ +\text{etc.} \end{array}\right. \\
 & & \begin{array}{l} +pqr \\ +pqs \\ +\text{etc.} \end{array} & +a^{m-3}\left\{\begin{array}{l} pqr \\ +pqs \\ +\text{etc.} \end{array}\right. \\
 & & & \cdots\cdots\cdots \\
 & & & \cdots\cdots\cdots \\
 & & & \cdots\cdots\cdots \\
 & & & +apqrs\ldots.m \\
 & & & +\text{etc.}
\end{array}\right\} = o.$$

J'observe maintenant que si dans cette équation, on fait toutes les quantités additionnelles $= o$, il restera le développement du binôme

$$(x + a)^m = o^m,$$

qui formera la première ligne

$$x^m + m a x^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2 x^{m-2} +, \text{ etc.}$$

En comparant donc cette équation avec l'équation générale

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Mx + N = o,$$

on aura, lorsque les quantités additionnelles seront toutes nulles, cette suite d'équations :

270.

1°. $a = \frac{A}{m}$

2°. $\frac{m.m-1}{2}\,\frac{A^2}{m^2} = B \ldots\ldots\ldots$ ou $A^2 - \frac{2mB}{m-1} = o.$

3°. $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}\,\frac{A^3}{m^3} = C \ldots$ ou $A^3 - \frac{2.3\,m^2 C}{m-1.m-2} = o.$

4°. $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\,\frac{A^4}{m^4} = D$ ou $A^4 - \frac{2.3.4\,m^3 D}{m-1.m-2.m-3} = o.$

....

Ultimo...... $\frac{A^m}{m^m} = N \ldots\ldots$ ou $A^m - m^m N = o.$

Les équations de cette deuxième colonne expriment les relations des différens cofficiens B, C, D, etc. avec le premier A, telles qu'elles forment des quantités nulles quand toutes les racines sont égales, comme on l'a vu plus haut (215) (218). Quand il y a dans l'équation composée des quantités additionnelles, ou que ses racines sont inégales, les deuxièmes membres des équations de cette deuxième colonne, au lieu d'être égaux à zéro, expriment chacun une fonction de ces quantités additionnelles.

On a vu, pour le deuxième degré, que le radical

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B}$$

ne contenait que des quantités additionnelles. Il en est de même des deux radicaux qui donnent les quasi-valeurs des équations du troisième degré ; car on a

$$\sqrt{A^2 - 3B} = (p+q+r)^2 - 3(pq+pr+qr),$$
$$SC = (p+q+r)^3 + 3(p^2q + p^2r + q^2p + q^2r + 2pqr);$$

et par conséquent le radical

$$\sqrt{2r \mp \frac{SC}{\sqrt{r}}}$$

ne contient que des quantités additionnelles.

271. On a vu que la formule de solution d'une équation quelconque était de cette forme :

$$x_1 \parallel \frac{1}{m}A - \sqrt{r} - \sqrt{R} - \sqrt{R'} - \sqrt{R''}, \text{ etc.};$$

de manière que chaque radical était une fonction des radicaux précédens. On a vu que la partie rationnelle, et la partie irrationnelle contenues sous chaque radical, étaient composées de relations de coëfficiens, dont les élémens ultérieurs étaient des relations de chaque coëfficient, avec le premier ; telles que tous ces élémens étaient séparément égaux à zéro quand

toutes les racines étaient égales, et qu'il ne restait pour la valeur de toutes les racines que

$$x \| \frac{1}{m} A ;$$

de sorte que tous ces radicaux ne contiennent que des fonctions de différences ou d'inégalités de racines. On doit donc conclure que, pour toutes les équations, les formules de solution ne contiennent dans les radicaux que des fonctions de quantités additionnelles p, q, r, etc. qui, par la combinaison du système multiple avec le système additionnel, ont formé plusieurs facteurs, et de-là plusieurs valeurs étrangères à celle qui a été introduite dans le problême.

De sorte qu'il faut considérer que, dans toute équation d'un degré m, la valeur introduite formerait le développement du binôme

$$(x + a)^m = 0^m,$$

si l'on pouvait faire disparaître toutes les quantités additionnelles qui lui sont combinées ; aussi doit-on regarder la formule du binôme comme la base ou comme le pivot sur lequel s'appuie la résolution de toutes les équations composées ; c'est ce que l'on a vu dans le développement de toutes les méthodes qui ont été exposées dans cet ouvrage, et l'on a re-

gardé le développement du binôme comme l'équation de niveau à toutes les équations composées quelconques du même degré.

272. Maintenant il faut distinguer ces deux expressions :

$$(x-a)^m=0^m \text{ et } x^m-a^m=0.$$

La première est la base du calcul des inéquations, et elle ne donne absolument qu'une seule valeur $x=a$, dans les formules qui ont été données.

La deuxième, au contraire, qui n'appartient qu'au système multiple, est étrangère au calcul des inéquations, c'est une équation composée qui n'a que le premier et le dernier terme. C'est le seul genre des équations composées que l'algèbre peut toujours résoudre par la méthode d'extraction ; mais c'est aussi le seul genre d'équations sur lequel le calcul des inéquations n'a aucune prise ; l'absence de tous les termes, et sur-tout du premier coëfficient A, lui ôte tous ses points d'appui ; on a d'abord pour toute équation d'un degré quelconque,

$$\sqrt{r}=0,$$

et, en se bornant ici aux formules du troisième degré, le grand radical

$$\sqrt{2r\pm\frac{SC}{\sqrt{r}}}=\sqrt{\pm\frac{27C}{0}};$$

c'est-à-dire que cette expression désigne une quantité infiniment grande, réelle ou imaginaire. Il en est de même des autres radicaux dans les équations plus élevées. Ainsi le calcul des inéquations commence où le secours de la méthode des équations finit, et son but est de décomposer les équations composées par la combinaison du système additionnel avec le système multiple.

DEUXIÈME PARTIE.

De la résolution des équations composées à plusieurs variables.

273. On a vû que la multiplicité des racines provenait du produit des différentes inconnues qui ne différaient entr'elles que par des quantités additionnelles. Ces différens produits sont toujours le résultat de l'élimination ou de la réduction à une équation finale qui ne contienne plus qu'une inconnue. Si l'on a deux équations complètes à deux variables, l'une du degré m, et l'autre du degré n, l'équation finale sera du degré mn; il en résulte donc une surcomposition, et par conséquent une multiplicité d'équivoques à débrouiller, indépendamment de la complication et de l'excessive longueur du calcul que leur solution exige.

Il est donc important de résoudre immédiatement ces équations à plusieurs inconnues sans avoir recours à l'élimination, c'est ce que l'on fait par le calcul des inéquations.

274. L'équation à deux inconnues du premier degré se réduit à

$$y = \frac{bx + c}{a}:$$

on voit qu'on ne peut avoir de valeur de y qu'autant qu'on en suppose une à x, et qu'en se bornant à cette seule équation, y est susceptible d'une infinité de valeurs correspondantes à l'infinité de valeurs qu'on peut supposer à x. De sorte que si l'on considère que cette équation n'appartient qu'au système numérique, la résolution de cette équation ne peut être représentée que par un tableau à deux colonnes, dont la première contiendrait les valeurs numériques supposées à x; et la deuxième, les valeurs correspondantes de y; alors x et y ne s'appellent plus inconnues, mais variables. La question des problèmes indéterminés consiste à chercher dans ces espèces d'équations, quels sont les nombres entiers qu'il faut supposer à x, pour qu'il en résulte d'autres nombres entiers pour y.

275. Maintenant si je considère que l'équation appartient au système géométrique, je vois qu'en prenant du point A (fig. 2), comme origine des valeurs, et sur une droite indéterminée AX une portion $AC = a$, et qu'en tirant

ensuite la ligne $CD = b$, si je mène par les deux points A et D la droite indéfinie ADN, et si je tire les parallèles PN, P′N′ à des distances variables $AP = x$, en appelant les parties correspondantes $PN = y$, j'aurai l'équation

$$y = \frac{bx}{a},$$

et en menant enfin la parallèle BM à une distance

$$AB = \frac{c}{a},$$

l'équation proposée

$$y = \frac{bx + c}{a}$$

exprimera la corrélation des valeurs géométriques AP, PM, AP′, P′M′, etc. Je reforme mon équation à l'aide d'un théorême de géométrie, mon équation en est donc la traduction. Par cette opération j'applique l'algèbre à la géométrie.

Maintenant si je considère que l'équation proposée appartient au système numérique, les lignes AP, PM, AP′, P′M′ n'en représenteront pas moins la corrélation des valeurs numériques de x et de y; alors, sous ce point de vue, la figure deuxième devra être considérée comme une espèce d'écriture, qu'on peut appeler *algèbre graphique*, les lignes ne tirant

plus leur origine du système géométrique seront considérées n'exprimer que des nombres dont l'unité sera représentée par une petite droite élémentaire, et la ligne BMM′, qu'on appelle le lieu de l'équation, n'est plus une ligne géométrique, mais doit être considérée comme une *trace numérique*.

Lorsque l'équation est du premier degré, c'est-à-dire lorsque les variables ne sont point multipliées par elles-mêmes, il en résulte, dans son application à la géométrie, que cette ligne est droite, et il en résulte plus généralement que tous les points de la trace numérique sont dans la même direction.

Si dans l'équation les variables sont multiples entr'elles, le lieu de l'équation est une courbe qui est d'un degré désigné par le degré de l'équation.

276. Il faut bien distinguer ce qu'on doit appeler courbe d'avec les traces numériques, dont les points ne sont plus dans la même direction. Quand, d'après des loix quelconques, je trace une ligne qui se trouve courbe en vertu de ces loix, je crée véritablement une courbe qui appartient au système géométrique. Ainsi je fixe une des pointes du compas et je promène l'autre, elle trace une courbe qui, par la nature de sa construction, a tous

ses points également éloignés du centre. Pareillement je fais rouler une circonférence sur une droite, et je remarque la courbe que décrit un des points de cette circonférence pendant son mouvement. Cette courbe a une origine géométrique, et je l'appelle cycloïde.

Pareillement encore je fais mouvoir une ligne de manière qu'une de ses extrémités A reste fixe, et l'autre B parcoure une circonférence en même temps qu'un point mobile partant de l'extrémité fixe parcourt la longueur de cette ligne, je remarque la courbe que parcourt ce point mobile en vertu de ce double mouvement. Cette courbe a encore une origine géométrique, et je l'appelle spirale : et ainsi des autres.

Au contraire, j'ai une équation quelconque composée à deux variables, et je détermine d'après cette équation différentes valeurs des ordonnées PM, PM', etc., correspondantes aux abscisses AP, AP' (fig. 3). Si je joins toutes les extrémités M, M', M'', etc. des ordonnées par des droites MM', M'M'', etc., je n'aurai qu'une trace numérique, parce que dans cette opération, je ne remonte pas à l'origine d'une courbe géométrique, dont les loix de sa création seraient exprimées par l'équation proposée, je me borne à traduire une expression

algébrique en une autre espèce de langage ou d'écriture qui est tout aussi générale que l'algèbre, et qui peut convenir indistinctement à une question géométrique ou à une question arithmétique.

J'ai, par exemple, l'équation

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

Si j'observe que cette équation est l'expression de la loi qui détermine la création du cercle, et si, en conséquence, je trace géométriquement une circonférence, j'ai une courbe. Mais si, comme dans le cas précédent, je me borne à déterminer différens points, par cela même que je ne remonte point à une origine géométrique, la suite de petites lignes droites qui joindra ces points ne sera qu'une trace numérique ; ces petites lignes droites sont étrangères à l'équation, il n'y a que les extrémités des coordonnées qui lui appartiennent, et qui par leur position déterminent la forme de la trace.

Construire géométriquement une courbe, en former une équation ou traduire en algèbre la loi de sa création ; c'est ce qu'on peut appeler la *synthèse* des courbes ou leur *composition*.

Remonter, au contraire, d'une équation à la courbe qui a pu la former, chercher à trans-

former cette équation en une autre qui appartienne à une courbe que l'on connaît : chercher encore dans les propriétés d'une trace numérique que l'on construit, d'abord une loi d'après laquelle on puisse construire géométriquement une courbe qui puisse rendre l'équation que l'on avait; ces opérations appartiennent à l'analyse des courbes. L'ensemble de ces deux marches opposées dans leur direction appartient à la théorie des courbes.

277. Les sections coniques offrent un exemple d'une théorie complète; d'abord le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole se tracent géométriquement, ou par un mouvement continu selon des loix d'après lesquelles on établit leur équation. On forme encore géométriquement ces quatre courbes par la section du cône, et on obtient de-là encore leur équation. D'un autre côté toutes les équations du deuxième degré à deux variables s'appliquent à l'une de ces quatre courbes.

Mais le nombre des courbes dont on a ainsi une théorie complète est très-limité. La presque totalité des équations à deux variables qui surpassent le deuxième degré, ne conduit à aucune courbe connue ; elles ne sont donc susceptibles que d'être traduites en algèbre graphique, et toutes les prétendues courbes

qu'on en obtient ne sont que des traces numériques.

Néanmoins la traduction de toutes les équations des degrés supérieurs à deux variables en traces numériques a un grand but d'utilité. Si j'ai deux équations de cette espèce, je construis leur trace numérique avec les mêmes axes des coordonnées, et avec la même origine des valeurs; alors les points d'intersection de ces deux traces, ou les points qui leur sont communs, déterminent immédiatement les valeurs de x et de y qui conviennent aux deux équations, et dispensent, par ce moyen, de l'énorme calcul qu'exige l'élimination des inconnues.

278. Lorsque les équations renferment trois variables, leurs valeurs corrélatives se déterminent à l'aide de trois plans coordonnés perpendiculaires entr'eux, dont les intersections forment les trois axes des coordonnées x, y, z; les points de la trace numérique ne se trouvent plus alors dans le même plan : le lieu de tous ces points appartient à une surface courbe, si l'on peut remonter à une construction géométrique qui puisse rendre la même équation; autrement on n'aura qu'une trace numérique qui aura la forme d'un polyèdre, dont toutes les facettes et les arrêtes

seront étrangères à l'équation, il n'y aura que les sommets des angles solides qui lui appartiendront.

Si l'on a trois équations composées à trois variables, on aura trois surfaces courbes, ou trois surfaces de polyèdres, qui, étant rapportées aux trois mêmes plans coordonnés, détermineront, par leur intersection, les valeurs x, y, z qui conviennent au problême. Ces points d'intersection peuvent se déterminer par les projections de ces surfaces courbes, ou de ces polyèdres sur les plans coordonnés, et, par ce moyen, on ramène la solution de ces espèces d'équations à celle des équations à deux variables, et par le moyen des traces numériques simples tracées sur des plans.

Tel est l'apperçu général de la résolution des équations composées à plusieurs variables par le moyen de l'application de l'algèbre à la géométrie.

Les géomètres, n'établissant aucune distinction entre les courbes et les traces numériques, considèrent une équation quelconque comme appartenant à une courbe géométrique, mais dont on ignore les loix de construction. On peut bien considérer les équations de cette manière, et il le faut bien quand on ne distingue pas les courbes des traces numéri-

ques ; mais alors on rapporte toutes les équations à des chimères lorsqu'elles surpassent le deuxième degré. Et, en les appliquant toutes au système géométrique, on fait une application étrangère au but qu'on se propose : car toutes les courbes, ou presque toutes les courbes qui surpassent le deuxième degré, ne sont que des échafaudages dont on se sert pour déterminer les valeurs corrélatives des variables ; elles ne sont donc qu'un instrument général dont on se sert pour résoudre les équations, quelque soit leur objet, quel que soit le système géométrique ou arithmétique auquel elles appartiennent ; elles ne sont donc enfin qu'une algèbre graphique, et non pas une application spéciale de l'algèbre à la géométrie. C'est sous ce point de vue que je les considère.

Les courbes ou les traces numériques ne sont que des moyens accessoires pour résoudre les équations composées à plusieurs variables ; c'est le seul but auquel je tends.

Je considère d'abord les équations à deux variables ; les moyens de solution qui leur conviendront s'appliqueront immédiatement aux équations à plusieurs variables.

Je considère 1°. les équations dans lesquelles une des deux variables, y n'est qu'au premier

degré avec une fonction quelconque de x à un degré quelconque;

2°. Les équations qui renferment une fonction de y au deuxième degré, et une fonction de x à un degré quelconque;

3°. Les équations qui renferment une fonction de y au troisième degré et une fonction de x à un degré quelconque, et ainsi de suite.

CHAPITRE PREMIER.

De la résolution des équations qui renferment y *à la première puissance et avec une fonction de* x *à un degré quelconque.*

279. Les équations de cette espèce se divisent en deux classes, la première renferme celles où y n'a pour coëfficient que des quantités constantes; et la seconde renferme celles où y est affecté d'une fonction de x.

La première sorte renferme les équations dont la forme générale est

$$y=p(x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots\ldots+Mx+N)=0;$$

je considère d'abord toutes les racines réelles; elles équivalent donc à

$$y=p[(x+a)(x+b)(x+c)(+\text{ etc.}]$$

Si on traduit cette équation en une trace numérique, on voit que x étant successivement $= 0$, en correspondant aux différentes racines a, b, c, etc. cette trace, ou cette courbe, coupera l'axe des X aux points x_1, x_2, x_3, etc., comme on le voit (fig. 4); et le deuxième membre de cette équation changeant de signe en passant d'une racine à l'autre, il faudra que la courbe aille en serpentant alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe.

Les racines se trouvent placées selon leur ordre de solution, tel qu'on l'a vu dans la première partie. Lorsqu'elles sont en partie positives et en partie négatives, la première est la plus grande racine positive, et la suite des racines va en décroissant de X vers X', et quand elles ont franchi l'origine des valeurs A, elles sont négatives. Si elles étaient toutes négatives, la première racine serait Ax_1 (fig. 5), qui est la plus petite en nombre, comme on l'a vu.

y étant positif ne parvient à la valeur zéro que par des valeurs qui décroissent successivement, et comme après avoir franchi zéro, il devient négatif, il s'ensuit que sa valeur continue de décroître, et en continuant de décroître, ses ordonnées s'alongent dans le

sens négatif; mais comme sa valeur doit redevenir $=0$, puis positive, elle croît donc de nouveau, et elle commence à croître au point où son ordonnée négative est la plus grande; de même, elle commence à décroître au terme où son ordonnée positive est aussi la plus grande; les termes d'accroissement et de décroissement sont donc des *maximum ;* il faut donc avoir recours au calcul différentiel pour les trouver.

Soit d'abord l'équation du troisième degré

280. $y = p(x^3 + Ax^2 + Bx + C)$,

j'aurai

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2Ax + B = 0;$$

d'où j'ai

$$x = -\tfrac{1}{3}(A \mp \sqrt{A^2 - 3B})$$

pour les valeurs de x qui répondent à deux *maximum*.

On peut remarquer que le radical contient la relation des deux coëfficiens A et B qui conviennent au troisième degré; et ces deux valeurs correspondantes au *maximum* sont les mêmes que les quasi-valeurs extrêmes des équations du troisième degré, à l'exception du grand radical, comme on l'a vu dans la pre-

mière partie (51); car on avait

$$x_1 - 1 < \tfrac{1}{3}(A - \sqrt{r} - \tfrac{1}{2}\sqrt{R}),$$
$$x_3 - 1 > \tfrac{1}{3}(A + \sqrt{r} + \tfrac{1}{2}\sqrt{R});$$

et l'on a ici simplement

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}(A - \sqrt{r}),$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{3}(A + \sqrt{r}).$$

La première de ces deux valeurs appartient à un *minimum* ; et la deuxième à un *maximum*; car en différentiant de nouveau l'équation, j'ai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2A,$$

d'où j'ai, en prenant la valeur de x_1,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{r},$$

et, en substituant celle de x_2, j'ai

$$-2\sqrt{r};$$

j'ai donc une trace de la forme telle qu'on la voit (fig. 6). Le *minimum* PM serait un *maximum* si on considérait sa valeur indépendamment de son signe; c'est donc une valeur pro-négative : en effet si j'avais eu l'équation

$$y = q + p(x^3 + Ax^2 + Bx + C),$$

en y substituant pour x la première des deux valeurs,

$$x_1 = -\tfrac{1}{3}(A - \sqrt{r});$$

la fonction de x m'aurait donné un résultat négatif n, et j'aurais eu

$$y = q - n;$$

dans ce cas, en prenant $AB = q$ et mettant l'origine des valeurs en B, on aurait eu pour le *minimum*

$$y = NP - PM = NM,$$

et pour le *maximum*

$$y = N'P' + P'M' = N'M';$$

la première est alors la plus petite des ordonnées, et la deuxième la plus grande, dans la *latitude des racines*; car avant la première racine et après la dernière, la trace numérique ou la courbe n'a plus de variation d'inflexion.

281. Pour trouver les variations d'inflexion qui n'appartiennent pas aux *maximum*, ou pour trouver ce qu'on appelle les points d'inflexion, je fais

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

d'où j'ai

$$x = -\tfrac{1}{3}A.$$

Ce point est plus éloigné de l'origine des valeurs que la première racine, et que le *minimum* PM, et il en est plus près que le *maximum* P'M'; il est donc entre le *maximum* et le *minimum*.

Il n'y a dans ce cas qu'un seul point d'inflexion, parce qu'après le *maximum* P′ M′ la courbe coupe l'axe au point de la dernière racine et n'a plus aucune variation d'inclinaison.

282. Soit maintenant l'équation du quatrième degré

$$y = p(x^4 + \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{D}),$$

j'ai

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0,$$

ou

$$x^3 + \tfrac{3}{4}\mathrm{A}x^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}x + \tfrac{1}{4}\mathrm{C} = 0;$$

j'ai pour cette équation du troisième degré

$$\sqrt{r} = \sqrt{\tfrac{9}{16}(\mathrm{A}^2 - \tfrac{8}{3}\mathrm{B}}.$$

$$\delta\mathrm{C} = \tfrac{27}{64}(8\mathrm{AB} - 2\mathrm{A}^3 - 16\mathrm{C}).$$

$$= -\tfrac{27}{64}(2\mathrm{A}^3 - 8\mathrm{AB} + 16\mathrm{C}).$$

On voit que le radical originel contient la relation de A et B qui convient au quatrième degré, et que la valeur de δC contient également la relation des trois premiers coëfficiens qui conviennent également au quatrième degré; on a en conséquence pour les trois quasi-valeurs de x, d'après la formule générale du troisième degré ci-dessus (163), première partie,

$$x_1 -\| \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} A - \sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2\left(A^2 - \frac{8}{3}B\right) - \dfrac{(2A^3 - 8AB + 16C)}{\sqrt{A^2 - \frac{8}{3}B}}} \end{array}\right.$$

$$x_2 -\| \tfrac{1}{4}\left[A + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r - \frac{SC}{\sqrt{r}}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC}{\sqrt{r}}}\right.$$

$$x_3 -\| \tfrac{1}{4}\left[A + \sqrt{r} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r + \frac{SC}{\sqrt{r}}}\right.$$

En substituant successivement ces trois quasi valeurs dans la proposée

$$y = p\,(x^4 + \text{, etc.},$$

on aurait, pour la première et la dernière valeur de y, des quantités négatives, et une quantité positive pour la valeur moyenne de x; ainsi la courbe aurait un *maximum* compris entre deux *minimum*, et on aurait la trace numérique, telle qu'on la voit (fig. 7).

283. Pour prendre les points d'inflexion, je différentie de nouveau, j'ai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6Ax + 2B;$$

en faisant cette valeur $= 0$, j'ai pour les deux points d'inflexion,

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}\left(A - \sqrt{A^2 - \tfrac{8}{3}B}\right),$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{4}\left(A + \sqrt{r}\right).$$

On voit qu'il y aura deux points d'inflexion, le premier plus loin de l'origine et que le pre-

mier *minimum* PM, et le deuxième plus près que le deuxième *minimum* P″M″. Ainsi la trace numérique a deux inflexions comprises entre le premier et le dernier *minimum.*

En général, on peut voir que quand toutes les racines sont réelles, il y a autant de *maximum* ou *minimum* qu'il y a de racines dans l'équation moins une; et autant de points d'inflexion qu'il y a de racines moins deux.

Si je différentie l'équation proposée une troisième fois, comme les deux premières, j'ai

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x + 6A,$$

d'où

$$x = -\tfrac{1}{4}A.$$

284. On voit qu'à chaque différentiation, si on fait $= 0$, les expressions

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc.};$$

les valeurs qui en résultent, pour x, perdent successivement un radical de tous ceux qui entrent dans la formule de solution de la proposée; mais que les radicaux qui restent renferment toujours des relations de coëfficiens qui appartiennent à l'équation proposée; qu'enfin, à la dernière différentiation, on a, pour x, une valeur qui convient aux racines

toutes égales, et qui est dépourvue de toute fonction qui constitue l'inégalité des racines.

285. On peut remarquer que ces différentes valeurs naissent de l'inégalité des racines; elles sont toutes en fonctions de radicaux qui déterminent l'inégalité des racines. Ainsi la méthode générale de solution qu'on a développée dans la première partie, détermine tous les points d'intersection des traces numériques avec la ligne des x, et les équations qu'on obtient des expressions différentielles qu'on fait $= 0$, déterminent toutes les variations d'inflexion qui résultent également de l'inégalité des racines.

286. Quand les racines sont toutes égales, l'équation générale équivaut à

$$y = p(x + a)^m;$$

dans cette expression y ne peut être qu'une fois $= 0$; si m est pair, il ne cesse pas d'être positif, s'il est impair, il ne passe qu'une fois du négatif au positif.

Pour obtenir les *maximum* de cette courbe, je fais la première différentielle $= 0$, j'ai

$$\frac{dy}{dx} = (m(x + a)^{m-1}) = 0,$$

d'où

$$x = -a.$$

Si je substitue cette valeur dans les différentiations successives,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m.m - 1\,p\,(x + a)^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m.m - 1.m - 2\,p\,(x + a)^{m-3},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = m.m - 1.m - 2.m - 3\,p\,(x + a)^{m-4},$$

$$\frac{d^my}{d^mx} = m.m - 1.m - 2.m - 3.\ldots.1.p;$$

elles seront toutes égales à zéro, excepté la dernière qui ne contient point de fonction de x.

Maintenant, si m est pair, la dernière expression différentielle est paire, et comme elle ne peut pas être $= 0$ et que sa valeur est positive, il s'ensuit qu'on a un *minimum*, et qu'il n'y a point de point d'inflexion.

La valeur $x = -a$, qui correspond au lieu du *minimum*, étant substituée dans l'équation proposée

$$y = p\,(x^4, \text{ etc.},$$

donne $y = 0$; on a donc une courbe ou une trace de la forme représentée par la fig. 8.

Si m est impair, l'avant-dernière expression différentielle, qui est paire, étant la dernière qui puisse être $= 0$, il s'ensuit qu'on n'a qu'un point d'inflexion et point de *maximum*; on

a donc une courbe ou une trace de la forme représentée (fig. 9).

On peut remarquer que, si $m = 2$, la trace numérique sera une véritable courbe, ce sera une parabole qu'on peut construire géométriquement, et non pas par points.

287. Supposons maintenant que la fonction de x de l'équation proposée, contienne des facteurs imaginaires, je considère d'abord que la fonction de x n'est que du troisième degré, l'expression des deux valeurs de x qu'on a obtenues pour le *maximum*

$$x = -\tfrac{1}{3}(A - \sqrt{A^2 - 3B})$$

indique qu'il y a encore un *minimum* et un *maximum*, si $\sqrt{A^2 - 3B}$ est réel, et qu'il n'y en aura point s'il est imaginaire; car l'expression imaginaire indique, par elle-même, qu'on a commis une erreur en faisant

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où elle est résultée. Mais, dans tous les cas, on aura un point d'inflexion, parce qu'en faisant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

on a

$$x = -\tfrac{1}{3}A,$$

qui est toujours réel.

On aura, pour ces différens cas, des traces numériques qui seront représentées par les fig. 10, 11, 12, 13; les traces fig. 10 et 11 appartiennent au cas où $\sqrt{A^2-3B}$ est réel, la première des deux quand x_1 est réel, et la deuxième quand c'est x_3. Celles fig. 12 et 13 appartiennent au cas où $\sqrt{A^2-3B}$ est imaginaire, la première des deux quand x_1 est réel, la deuxième quand c'est la troisième racine x_3.

288. Je viens maintenant au cas où la fonction de x de la proposée est du quatrième degré, en faisant

$$\frac{dy}{dx}=0,$$

pour avoir les *maximum*, on obtient une équation du troisième degré, comme on a vu ci-dessus (282); si ces trois valeurs sont réelles, on aura trois *maximum* ou *minimum*, comme dans le cas où toutes les racines de la proposée sont réelles. En différentiant une seconde fois, les deux valeurs qu'on obtient

$$x=-\tfrac{1}{4}(A\mp\sqrt{A^2-\tfrac{8}{3}B})$$

annoncent qu'il y a encore deux points d'inflexion. Les fig. 14 et 15 indiquent la forme que doit avoir la trace numérique dans ce cas. La première des deux est pour le cas où la

fonction de x, dans la proposée a deux facteurs réels et deux imaginaires ; et la deuxième est pour le cas où elle a ses quatre facteurs simples, ou ses quatre racines imaginaires.

On peut toujours s'assurer immédiatement de ce cas par la relation des coëfficiens de la proposée ; il faut pour cela qu'on ait à la fois

$$A^2 - \tfrac{8}{3} B > 0,$$
$$2(A^2 - \tfrac{8}{3} B) - (2A^3 - 8AB + 16C) > 0,$$
$$2(A^2 - \tfrac{8}{3} B) + (2A^3 - 8AB + 16C) > 0,$$

d'après la formule ci-dessus (282).

Si l'une de ces deux dernières inéquations était négative, il y aurait deux racines imaginaires dans l'équation des *maximum*, il n'y en aurait qu'un seul, et il est nécessaire qu'il y en ait un ; parce que l'équation des *maximum*, qui est du troisième degré, a nécessairement une racine réelle. Les fig. 16 et 17 expriment la forme de la trace numérique pour ce cas ; la première des deux convient au cas où la proposée aurait ses deux premières racines réelles, et la deuxième au cas où elles seraient toutes imaginaires.

Si $\sqrt{A^2 - \frac{8}{3} B}$ était imaginaire, il y aurait toujours un *minimum ;* mais l'expression des points d'inflexion

$$x = -\tfrac{1}{4} (A \mp \sqrt{A^2 - \tfrac{8}{3} B})$$

indique qu'il n'y en aurait point ; mais la troisième différentielle

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = 24 x + 6 A,$$

étant $= 0$, donne $x = -\frac{1}{4}A$, qui est toujours réel ; cette différentielle appartient au seul *maximum* qui reste, et la différentielle d'un degré pair

$$\frac{d^4 y}{d x^4} = 24,$$

qui a une valeur positive, indique que c'est un *minimum*. Ainsi, dans ce cas, la courbe ou la trace aura la forme que l'on voit (fig. 18 et 19).

La première des deux est encore pour le cas où la proposée aurait deux racines réelles, et la deuxième pour le cas où toutes ses racines seraient imaginaires.

Ces deux courbes ne diffèrent pas, quant aux variations d'inclinaison, de la courbe (fig. 8), qui appartient à une fonction de x, d'un degré pair dont toutes les racines sont égales.

289. Je passe à l'équation qui contient une fonction de x du cinquième degré,

$$y = p(x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E),$$

j'ai

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$

d'où l'équation des *maximum* est

$$x^4 + \tfrac{4}{5}Ax^3 + \tfrac{3}{5}Bx^2 + \tfrac{2}{5}Cx + \tfrac{1}{5}D = 0;$$

le radical $\sqrt{A'^2 - \frac{8}{3}B'}$ du quatrième degré, devient

$$= \tfrac{4}{5}\sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B},$$

la petite quasi-valeur

$$\varpi = \tfrac{1}{4}(A' - 3\sqrt{A'^2 - \tfrac{8}{3}B'},$$

devient

$$= \tfrac{1}{5}(A - 3\sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B};$$

en différentiant encore, j'ai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 + 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

qui donne, pour l'équation des points d'inflexion,

$$x^3 + 0{,}6Ax^2 + 0{,}3Bx + 0{,}1C = 0;$$

le radical $\sqrt{A'^2 - 3B'}$ du troisième degré, devient

$$\tfrac{3}{5}\sqrt{A^2 - \tfrac{2}{5}B},$$

la quasi-valeur

$$\varpi = \tfrac{1}{3}(A' - 2\sqrt{A'^2 - 3B'}),$$

devient

$$\varpi = \tfrac{1}{5}(A - 2\sqrt{A^2 - \tfrac{5}{2}B}.$$

Je ne chercherai point à trouver les relations

des autres coëfficiens ; mais, d'après ceci et d'après ce qu'on vient de voir, dans ce chapitre, on peut conclure cette régle générale.

290. 1°. L'équation des *maximum* d'une équation proposée d'un degré n, est du degré $n-1$; ses quasi-valeurs dans le calcul des inéquations sont exprimées par les formules de solution du degré $n-1$; mais les relations des coëfficiens, ou les valeurs de SB, SC, SD, etc. qui entrent dans ces expressions, sont celles qui conviennent au degré m, et le dénominateur général du premier coëfficient A, et de tous les radicaux est m ;

2°. L'équation des points d'inflexion est du degré $n-2$, ses quasi-valeurs sont également exprimées par les formules de solution du degré $n-2$, et les relations des coëfficiens, dans ces expressions appartiennent encore au degré m, et le dénominateur général est encore m ;

3°. Il en est de même des équations qui résultent de toutes les différentiations successives qu'on fait $=0$, et qui appartiennent aux *maximum* des racines qui suivent, si le degré différentiel est impair, et aux inflexions qui suivent si le degré différentiel est pair. De sorte que les formules de solution que donne le calcul des inéquations peuvent servir aussi à déterminer toutes les variations d'inclinaison de leur trace numérique.

291. La deuxième sorte de courbes ou traces numériques appartient aux équations dans lesquelles y est affecté d'une fonction de x quelconque, je prends d'abord le cas le plus simple, celui où le numérateur du deuxième membre de l'équation n'est qu'une constante, tel que

$$y = \frac{p}{x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots\ldots + N};$$

si les racines sont toutes réelles, elle équivaut à

$$y = \frac{p}{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\text{etc.}}$$

Dans ce cas il est clair que le dénominateur sera $= 0$, et par conséquent y infini toutes les fois que la valeur de x tombera sur une des racines de la fonction, il changera néanmoins de signe en passant d'une racine à l'autre ; la courbe ou la trace numérique devra avoir la forme telle qu'on la voit (fig. 20). Le passage d'une racine à l'autre est déterminé par deux asymptotes qui ont une direction opposée. Ainsi l'ordonnée la plus près de x_1, avant d'y arriver, est encore positive ; mais comme elle est le plus près possible du point où le premier facteur

$$(x+a) = 0,$$

elle est donc la plus grande possible ; c'est donc une asymptote positive, immédiatement après quand x a franchi la valeur de la première racine, l'ordonnée qui est la plus près de ce terme est négative ; mais comme elle est infiniment près du terme où

$$x + a = 0,$$

elle forme donc une asymptote dans une direction opposée à la première. Le même raisonnement a lieu pour le passage des autres racines.

Ensuite, quand la courbe a franchi la latitude de toutes les racines, elle se prolonge à droite et à gauche par deux asymptotes encore opposées qui s'approchent toujours de l'axe des x, sans jamais les toucher.

En effet, dans ce cas-ci où toutes les racines sont supposées négatives, quand $x = 0$, on a

$$y = \frac{P}{abcd \text{ etc.}} = AC;$$

si on augmente x successivement dans la direction positive, le dénominateur ou le produit des facteurs

$$(x + a)(x + b)(x + c)$$

croîtra successivement, et rien ne pourra limiter l'accroissement qu'on pourra lui donner ; la valeur de y décroîtra donc dans la mê-

me proportion, la trace numérique s'approchera donc constamment de l'axe des x.

Il en sera de même vers les x négatifs quand y aura franchi toutes les racines, les facteurs

$$(x+a)(x+b) \text{ etc.}$$

formeront encore un produit qui ira toujours en croissant, il en résultera par conséquent une autre asymptote.

L'équation la plus simple de cette espèce est celle-ci

$$y=\frac{p}{x+a};$$

la trace numérique qui en résulte est une véritable courbe, c'est l'hyperbole rapportée à ses asymptotes (fig. 21); elle a une origine géométrique.

On voit, par la nature de l'équation proposée, que les *maximum* de la fonction de x, prise isolément, étant au dénominateur forment des *minimum*, et réciproquement.

Quant aux racines imaginaires, on voit que toutes les fois qu'il y a des racines imaginaires, il n'y a point d'asymptotes correspondantes à leur valeur.

En général, les asymptotes tiennent ici lieu de l'intersection de l'axe quand la fonction de x est au numérateur; le reste suit la même loi, mais toujours dans un ordre inverse.

Enfin je viens à l'équation la plus compliquée, et qui est de la forme

$$y=\frac{p\,(x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}\ldots\ldots\ldots + N)}{q\,(x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2}\ldots\ldots\ldots + N')}$$

Dans la trace numérique qui résulte de cette équation, les racines soit qu'elles soient au numérateur ou au dénominateur, suivent leur rang numérique, de sorte que celles du dénominateur viennent s'intercaler entre celles du numérateur, pour prendre la place qui leur convient, et forment des asymptotes au lieu d'intersection de l'axe. Soit donc l'équation suivante, décomposée en ses facteurs simples :

$$y=\frac{p(x+a)(x+b)(x+d)(x+e)(x+h)}{(x+c)(x+f)(x+g)(x+i)(x+l)}$$

l'ordre alphabétique des lettres a, b, c, d, etc. y suit le rang numérique des racines, on doit avoir une trace numérique de la forme représentée (fig. 22) ; elle se termine par une asymptote le long de l'axe des x négatifs, parce que la dernière racine est au dénominateur ; il y en aurait eu une de même le long des x positifs, si la première racine $x + a$ eût été au dénominateur.

Pour faire voir que c'est ainsi que lesracines se disposent, il suffit d'observer que la valeur

du numérateur ne change de signe qu'au lieu où les racines du numérateur coupent l'axe des abscisses, quand le numérateur $=0$, par la supposition de x égal à une racine, le dénominateur a toujours une valeur quelconque, à moins qu'il ne s'y trouve la même racine qu'au numérateur : dans ce cas la fraction proposée a un facteur commun qu'on fait disparaître. Le raisonnement est le même pour les racines du dénominateur, le lieu de leurs asymptotes est aussi invariable que celui de l'intersection de l'axe pour les racines du numérateur.

Il n'en est pas de même des *maximum*, des points d'inflexion, etc.; ceux du numérateur sont modifiés par ceux du dénominateur, et réciproquement. Il peut arriver, par exemple, que le lieu d'un *minimum*, au numérateur, répondît au dénominateur à un point très-près de la valeur d'une racine qui rendît le résultat du dénominateur assez petit pour former un *maximum* au lieu d'un *minimum*.

Pour avoir tous les points de la variation d'inclinaison de cette trace, il faut différentier successivement la fonction de x, l'équation des *maximum* se trouve être du neuvième degré ; en effet, cette fonction ayant dix racines différentes, est réellement du dixième

degré : il a suffi pour trouver ces dix racines de résoudre séparément les deux équations du cinquième degré, du numérateur et du dénominateur; mais il n'en est pas de même pour trouver les *maximum*, leur position dépend de l'ensemble de toutes les racines.

On voit déjà comme le calcul différentiel sur-compose les fonctions, ce serait bien autre chose, si le numérateur et le dénominateur contenaient des radicaux. On verra comment on peut se passer de ce moyen, qui conduit à des resultats souvent très-compliqués, quand les fonctions de variables sont à un degré un peu élevé. L'on verra que les formules de solution qui ont été exposées dans la première partie suffisent pour développer la théorie des courbes de tous les degrés.

Je me suis étendu sur ce premier chapitre, qui, considéré d'une manière isolée, ne présente pas un grand but d'utilité ; mais ici il sert de base à la résolution des équations des différens degrés.

CHAPITRE II.

De la résolution des équations dans lesquelles une des deux variables ne se trouve qu'au premier et au deuxième degré, et l'autre à un degré quelconque.

292. Ce chapitre commence aux équations qui sont du *second-second* degré ; c'est-à-dire celles où x et y sont à la première et à la deuxième puissance. Celles qui ne contiennent que x à la première puissance se trouvent comprises dans le chapitre précédent.

PREMIÈRE SECTION.

De la résolution des équations du second-second degré.

Cette première section appartient aux sections coniques, parce que, quelle que soit la forme de l'équation, on peut toujours la ramener à une de celles qui expriment les loix de création de ces courbes géométriques. Comme mon but, dans cet ouvrage, n'est que de traduire les équations en écriture graphique, je ne les considérerai que sous ce point de vue.

Soit donc l'équation générale du second-second degré,

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Ex + F = 0;$$

en regardant x comme une quantité connue, j'ai les deux valeurs suivantes:

$$y = -\tfrac{1}{2}(C + Ax)$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)x^2 + 2(AC - 2E)x + C^2 - 4F},$$

ou

$$y = -\tfrac{1}{2}(C + Ax)$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)\left(x^2 + 2\frac{(AC - 2F)}{A^2 - 4B}x + \frac{(C^2 - 4F)}{A^2 - 4B}\right)}.$$

293. Ce coëfficient $(A^2 - 4B)$ est remarquable, il exprime la relation des deux premiers coëfficiens qui conviennent au degré de l'équation. Le dernier terme $C^2 - 4F$ exprime la même relation. On remarquera la même loi dans les degrés plus élevés. J'appelle ρ le coëfficient $A^2 - 4B$, et, pour donner à l'équation la forme convenable au point de vue sous lequel je la considère, j'exprime les valeurs de y de la manière suivante :

$$y = -\tfrac{1}{2}(C + Ax) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\rho(x + a)(x + b)}.$$

Je construis la partie rationnelle du deuxième membre en prenant du point A (fig. 23), origine des valeurs, la ligne $AC = \tfrac{1}{2}A$; puis en tirant du point C la ligne FD, faisant avec

l'axe des x un angle dont la tangente $=\frac{1}{2}$ A, cette ligne est la trace numérique des équations du premier degré, elle sert d'axe à la trace numérique qui résulte de la fonction comprise sous le radical.

294. Quant à cette fonction, il faut distinguer différens cas, 1°. si les deux racines sont du même signe; si elles sont, par exemple, toutes deux négatives, j'aurai d'abord un produit positif en substituant, à la place de x, des valeurs négatives; depuis zéro jusqu'à la rencontre de la plus petite racine en nombre $=-a$, mon produit sera nul; puis en faisant croître x négativement, le produit changera de signe, et j'aurai une expression imaginaire jusqu'à la rencontre de l'autre racine b, qui me donnera encore un produit $=0$, après quoi j'aurai, de nouveau, un produit positif et qui ne cessera pas de l'être, parce que j'ai franchi toutes les racines; d'un autre côté, si je donne à x des valeurs positives, je ne cesserai pas d'avoir un produit positif toujours croissant, j'aurai donc deux branches opposées, dont la première commencera en H au point correspondant à $x=-a$, et l'autre en H' au point où $x=-b$; la partie BG de l'abscisse $=b-a$ comprise entre H et H' correspondra à une trace imaginaire. Chacune des deux branches

aura à chaque point de l'axe FD deux ordonnées opposées égales à cause du double signe du radical. Cette courbe est ce qu'on appelle *hyperbole*.

Maintenant si j'ai égard à la trace imaginaire comprise entre H et H', cette trace est une courbe fermée qui est également coupée en deux parties égales ; elle appartient à l'*ellipse* : on l'a représentée ponctuée sur la figure.

295. 2°. J'ai supposé que le coëfficient ρ ou A^2-4B était positif ; s'il était négatif, alors l'*ellipse* serait la courbe réelle de l'équation ; et les deux branches hyperboliques en deviendraient la partie imaginaire.

On peut remarquer maintenant que l'ensemble des parties réelles et imaginaires de la courbe forme un entrelacement des deux courbes qui résulteraient de la fonction

$$\rho(x+a)(x+b),$$

et de la fonction

$$-\rho(x+a)(x+b).$$

296. 3°. Si le coëfficient A^2-4B était $=0$, il ne resterait que

$$\sqrt{2(AC-2F)x+C^2-4F}.$$

La trace qui en résulterait n'aurait plus qu'une seule intersection avec l'axe, il en résulterait la parabole (fig. 26).

4°. Si les deux racines du radical étaient de signe différent, si l'on avait, par exemple,

$$\sqrt{\rho(x+a)(x-b)},$$

la courbe serait également une hyperbole avec ρ positif, et une ellipse avec ρ négatif; mais le centre des valeurs A se trouverait placé entre les deux branches hyperboliques (fig. 24); car en supposant des valeurs positives à x, depuis o jusqu'à la rencontre de la racine b, on aurait un produit négatif; après ce terme, les produits seront toujours positifs, il en résultera donc une première branche qui aura son origine en H, à une distance correspondante $AG=b$, et qui s'étendra infiniment vers les x positifs; d'un autre côté, en supposant à x des valeurs négatives, depuis o jusqu'à la rencontre de la racine

$$x=-a,$$

on aura encore un produit négatif, après quoi ce produit sera positif et ne cessera pas de l'être; on aura donc encore une autre branche vers les x négatifs, qui aura son origine en H, à une distance correspondante $AB=a$; de sorte que la portion de l'abscisse BG, ou de l'axe HH' correspondante aux abscisses imaginaires, sera égale à la somme des deux racines a et b, tandis que dans le premier cas

elle n'était égale qu'à leur différence : c'est en quoi seulement diffèrent ces deux courbes.

297. 5°. Enfin, si la fonction de x sous le radical n'est pas décomposable en deux facteurs simples, elle se ramenera à la forme

$$\sqrt{p[(x+a)^2+q]};$$

alors les ordonnées seront toujours positives, leur *minimum* correspondra à $x=-a$; il en résultera deux branches qui s'étendront à l'infini, l'une vers les y positifs, l'autre vers les y négatifs, comme on le voit (fig. 25). Cette courbe est encore une autre hyperbole.

DEUXIÈME SECTION.

De la résolution des équations du deuxième-troisième degré, du deuxième-quatrième, etc.

298. Je suppose d'abord que toutes choses égales d'ailleurs, comme dans la section précédente, le radical soit composé de trois racines, on aura

$$y=-\tfrac{1}{2}(C+Ax)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

Si elles sont toutes trois réelles et négatives, on aura vers les x négatifs une trace hyperbo-

lique réelle jusqu'à la rencontre de $x=-a$; c'est-à-dire au point H (fig. 27), puis une trace imaginaire qui se fermera en H', au point correspondant à $x=-b$, enfin une trace réelle qui se fermera en H'', au point correspondant à $x=-c$, parce que dans cet intervalle le produit sous le radical sera positif, au point H'' commencera une courbe ou trace imaginaire qui s'étendra infiniment ; s'il y avait quatre racines sous le radical, on aurait alors une trace numérique, représentée par la fig. 28; et ainsi de suite.

Toutes les parties de ces traces, tant réelles qu'imaginaires, sont coupées en deux parties égales par l'axe FD ; ainsi on peut considérer celles qui sont fermées comme appartenant à la clase des ellipses, et celles qui s'étendent à l'infini, à la classe des hyperboles.

Si les racines de la fonction de x sous le radical étaient ou toutes imaginaires ou en partie réelles et en partie imaginaires, il en résulterait les différentes formes qu'on a développées dans la première partie ; en général, toutes ces espèces de traces ne sont que l'entrelacement de deux fonctions de x de la forme

$$\rho(x+a)(x+b)(x+c)\text{ etc.}$$

et $$-\rho(x+a)(x+b)(x+c)\text{ etc.}$$

299. Supposons maintenant que l'équation proposée soit de cette forme :

$$y = -\tfrac{1}{2}(C + Ax)$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p(x+a)(x+c)(x+e)(x+g)(x+h)}{(x+b)(x+d)(x+f)}}$$

dans laquelle les racines ont leur rang alternativement au numérateur et au dénominateur, excepté les deux dernières, on aura une trace numérique, représentée par la fig. 29, qui aura trois paires d'asymptotes pour les trois racines du dénominateur, et cinq intersections de l'axe pour les cinq racines du numérateur ; les lignes ponctuées appartiennent aux traces imaginaires, si p était négatif, elles formeraient la partie réelle de la trace, et la trace qui est réelle sur la figure serait la partie imaginaire, et l'ensemble de ces deux parties réelles et imaginaires est encore l'entrelacement des deux traces formées par la même fonction, avec p positif et p négatif.

300. Supposons encore que l'on ait l'équation

$$y = \sigma(x+a)(x+d) \pm \sqrt{p(x+b)(x+c)(x+e)}\,;$$

alors l'axe FD, au lieu d'être une ligne droite, est une courbe sur laquelle on place les coordonnées du radical, et l'on obtient une trace

numérique telle qu'on la voit (fig. 30). Les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e* indiquent le rang numérique des racines ; ainsi l'axe FD, avec ses deux racines *a* et *d*, coupe l'axe des x aux points *a* et *d*, et forme une trace numérique qui n'est qu'accessoire à celle de l'équation et qui n'en est que l'axe ; la fonction du radical qui forme la trace de l'équation coupe cet axe courbe aux points *b*, *c*, *e* d'après l'ordre de ses racines ; cette trace, comme les précédentes, est composée alternativement de parties réelles et de parties imaginaires.

301. On peut remarquer qu'en considérant l'ensemble de ces deux parties, la trace numérique, d'une équation quelconque, se termine toujours par des branches qui s'étendent à l'infini dont la première a son origine à la première racine et la deuxième à la dernière, ce qui doit être, parce qu'alors la trace n'a plus de principe qui fasse varier son inclinaison. Si le nombre des racines est pair, les deux branches infinies sont réelles, s'il est impair, la dernière est imaginaire.

J'ai supposé, pour plus de simplicité, toutes les racines du même signe et toutes négatives ; mais quand elles sont indifféremment positives et négatives, l'origine des valeurs A n'est plus à droite de toutes les variations de la

courbe, il est entre les racines positives et les racines négatives; mais l'ordre des racines est toujours de droite à gauche; la plus grande des racines positives est la première, puis en remontant vers la gauche, parce que la résolution de toutes les équations s'établit sur la forme générale

$$x^m - A x^{m-1} + \text{ etc.}$$

Si on l'établissait d'après la forme

$$x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - \text{etc.},$$

alors l'ordre des racines serait de gauche à droite.

Maintenant si la résolution d'un problème quelconque conduisait à deux équations à deux variables, je formerais une trace numérique pour chacune de ces deux équations, et en les superposant l'une sur l'autre, ou plutôt en les traçant sur les mêmes axes avec la même origine des valeurs, leurs points d'intersection détermineraient les valeurs de x et de y communes aux deux équations, et par conséquent appartenant à la solution du problème que l'on traite.

Si les courbes étaient des fonctions coniques, on pourrait, en les construisant géométriquement, avoir des valeurs à peu près assez exactes des x et des y; mais les équa-

tions qui peuvent se rapporter aux sections coniques ne sont qu'un cas très-particulier dans la résolution générale des équations, on ne peut obtenir, pour toutes les équations qui passent le second-second degré que des traces numériques ou des courbes décrites par points qui ne peuvent donner que des valeurs approchées ou des quasi-valeurs. Il faut encore, pour les rendre exactes, l'opération de la concentration dont je m'occuperai ci-après.

CHAPITRE III.

De la résolution des équations à deux variables, dans lesquelles l'une des deux variables ne se trouve qu'au premier, au second et au troisième degré, et l'autre à un degré quelconque.

502. C'est à ce chapitre que commence l'application du calcul des inéquations. C'est par le moyen des formules de solution qu'il donne qu'on obtient les traces numériques des équations qu'on a à résoudre.

La résolution des équations du troisième-second et du troisième-premier degré est comprise dans les chapitres précédens.

Ce chapitre commence donc à la résolution des équations du troisième-troisième degré.

PREMIÈRE SECTION.

De la résolution des équations du troisième-troisième degré.

Soit donc l'équation générale du troisième-troisième degré,

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + Axy^2 + Bx^2y + Cx^3 + Dy^2 \\ + Fxy + Fx^2 + Gy + Hx + L \end{array}\right\} = 0;$$

je la traite comme si x était une quantité connue, j'ai donc

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + (Ax + D)y^2 + (Bx^2 + Fx + G)y \\ + Cx^3 + Fx^2 + Hx + L \end{array}\right\} = 0,$$

ou bien

$$y^3 + A'y^2 + B'y + C' = 0;$$

j'ai d'abord $\sqrt{A'^2 - 3B'}$ ou $\sqrt{r'}$,

$$= \sqrt{(A^2 - 3B)x^2 + (2AD - 3E)x + D^2 - 3G}$$

$$= \sqrt{(A^2 - 3B)\left[x^2 + \left(\frac{2AD - 3E}{A^2 - 3B}\right)x + \frac{D^2 - 3G}{(A^2 - 3B)}\right]}$$

$$= \sqrt{r(x + a)(x + b)}.$$

En comparant ce radical originel avec le radical du chapitre précédent, on voit que la

relation des coëfficiens y suit la même loi. Le coëfficient de x^2 exprime la relation des deux premiers coëfficiens qui conviennent au troisième degré, et le dernier terme $D^2 - 3G$ exprime la même relation pour les y, que $A^2 - 3B$ pour les x; j'ai exprimé $A^2 - 3B$ par la même lettre r, employée pour désigner la même relation dans la première partie.

Pour trouver ensuite $\mathcal{S}C'$ ou la relation des trois coëfficiens, $9A'B' - 2A'^3 - 27C'$, j'ai

$$\mathcal{S}C' = \begin{cases} (9AB - 2A^3 - 27C)x^3 \\ + (9AE + 9BD - 6A^2D - 27F)x^2 \\ + (9AG + 9ED - 6AD^2 - 27H)x \\ + 9DG - 2D^3 - 27L. \end{cases}$$

On peut remarquer ici que le coëfficient de x^3 exprime la relation des trois premiers coëfficiens A, B, C qui affectent y^2, y^1, y^0, et que le dernier terme exprime également la même relation des trois coëfficiens D, G, L qui affectent de même y^2, y^1, y^0. Je donne à $\mathcal{S}C'$ la forme suivante, en appelant $\mathcal{S}C$, la relation $9AB$, etc.

$$\mathcal{S}C' = \mathcal{S}C \begin{cases} x^3 + \left(\dfrac{9AE + 9BD - 6A^2D - 27F}{\mathcal{S}C}\right)x^2 \\ + \left(\dfrac{9AG + 9ED - 6AD^2 - 27H}{\mathcal{S}C}\right)x \\ + \dfrac{9DG - 2D^3 - 27L}{\mathcal{S}C} \end{cases}$$

ou

$$\delta C' = \delta C\,[(x+c)(x+d)(x+e)].$$

En prenant maintenant la formule générale de solution du troisième degré, de la première partie, qui est

$$y_1 = \tfrac{1}{3}\left(A' - \sqrt{r'} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r' + \frac{\delta C'}{r'}}\right)$$

$$y_2 = \tfrac{1}{3}\left(A' + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r' + \frac{\delta C'}{\sqrt{r'}}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r' - \frac{\delta C'}{\sqrt{r'}}}\right)$$

$$y_3 = \tfrac{1}{3}\left(A' + \sqrt{r'} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r' - \frac{\delta C'}{\sqrt{r'}}}\right)$$

cette formule devient, en mettant pour A', r', $\delta C'$, leur valeur :

$$y_1 = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} D + Ax - \sqrt{r(x+a)(x+b)} \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2r(x+a)(x+b) + \dfrac{\delta C(x+c)(x+d)(x+e)}{\sqrt{r(x+a)(x+b)}}} \end{array}\right.$$

$$y_2 = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} D + Ax \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2r(x+a)(x+b) + \dfrac{\delta C(x+c)(x+d)(x+e)}{\sqrt{r(x+a)(x+b)}}} \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2r(x+a)(x+b) - \dfrac{\delta C(x+c)(x+d)(x+e)}{\sqrt{r(x+a)(x+b)}}} \end{array}\right.$$

$$y_3 = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} D + Ax + \sqrt{r(x+a)(x+b)} \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2r(x+a)(x+b) - \dfrac{\delta C(x+c)(x+d)(x+e)}{\sqrt{r(x+a)(x+d)}}} \end{array}\right.$$

On peut remarquer d'abord qu'en considérant séparément les coefficiens des diverses fonctions de x qui sont sous les radicaux, on a précisément la même formule que celle qui appartient aux équations du troisième degré à une seule inconnue.

Maintenant on peut voir que dans les quasi-valeurs de y_1 et y_3 la partie rationnelle avec le premier radical appartiennent à une courbe du second-second degré, et peuvent se construire par une section conique ; elle servira d'axe aux deux branches appartenant aux y_1 et y_3 qu'on obtiendra par le moyen des deux grands radicaux,

$$\sqrt{2r' + \frac{SC'}{\sqrt{r'}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{2r' - \frac{SC'}{\sqrt{r'}}}$$

que j'appelle $\sqrt{R'}$ et $\sqrt{R'_{\prime}}$.

Quant à la branche qui appartient aux y_2, comme elle ne contient pas le premier radical

$$\sqrt{r(x+a)(x+b} = \sqrt{r'},$$

elle se construira sur l'axe donné par la partie rationnelle $D + Ax$, qui est une ligne droite.

303. Pour faire voir comment, à l'aide de cette formule, on peut construire une trace numérique quelconque du troisième ordre, je l'applique aux deux équations suivantes, que je

présente d'abord dans cet ordre :

$$1^{re} \left\{ \begin{array}{l} y^3 - 2xy^2 - 5x^3 - y^2 + 3xy \\ - 4x^2 - 3y + 6x + 3 \end{array} \right\} = 0;$$

$$2^{e} \left\{ \begin{array}{l} y^3 - 2xy^2 + 3x^2y + 4x^3 - 3y^2 \\ + 4xy + 3x^2 - 6y + 6x + 2 \end{array} \right\} = 0.$$

Elles ont été formées d'avance avec la supposition de $x = 1$ et $y = 3$. Il faut voir comment on retrouvera ces deux valeurs. Je ne chercherai pas à éliminer une des inconnues, mais je résoudrai immédiatement et séparément chacune de ces deux, et je commence par la première, qui, par la disposition de ses termes, a pour coëfficiens immédiats,

$$\begin{array}{lll} A = -2 \ldots & D = -1 \ldots & G = -3 \\ B = \;\;\, 0 \ldots & E = \;\;\, 3 \ldots & H = \;\;\, 6 \\ C = -5 \ldots & F = -4 \ldots & L = \;\;\, 3, \end{array}$$

d'où l'on tire

$$r = 4,$$
$$\mathcal{S}C = 151.$$

Je la traite comme une équation du troisième degré à une seule inconnue, en lui donnant cette forme :

$$y^3 - (2x+1)y^2 + (3x-3)y - (5x^3 + 4x^2 - 6x - 3) = 0;$$

ses coëfficiens complexes sont alors

$$A' = -(2x+1),$$
$$B' = 3x - 3,$$
$$C' = -(5x^3 + 4x^2 - 6x - 3),$$

d'où l'on tire

$$r' = 4\,(x^2 - 1{,}25\,x + 2{,}5),$$
$$\mathcal{S}C' = 151\,x^3 + 78\,x^2 - 123\,x - 52\,;$$

de-là j'ai, pour les trois valeurs de y,

$$y_1 - \| \tfrac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} -(1+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\sqrt{4\,(x^2 - 1{,}25\,x + 2{,}5)} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2.4(x^2-1{,}25x+2{,}5)+\dfrac{151x^3+78x^2-123x-52}{\sqrt{4(x^2-1{,}25x+2.5)}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'. \\ -\sqrt{r'}. \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{R'}. \end{array}$$

$$y_2 - \| \tfrac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} -(1+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2.4(x^2-1{,}25x+2{,}5)+\dfrac{151x^3+78x^2-123x-52}{\sqrt{4(x^2-1{,}25x+2{,}5)}}} \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2.4(x^2-1{,}25x+2{,}5)-\dfrac{151x^3+78x^2-123x-52}{\sqrt{4(x^2-1{,}25x+2{,}5)}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'. \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{R'}. \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{R'_{,}}. \end{array}$$

$$y_3 - \| \tfrac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} -(1+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\sqrt{4\,(x^2 - 1{,}25\,x + 2{,}5)} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2.4(x^2-1{,}25x+2{,}5)-\dfrac{151x^3+78x^2-123x-52}{\sqrt{4(x^2-1{,}25x+2{,}5)}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'. \\ +\sqrt{r'}. \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{R'_{,}}. \end{array}$$

Pour construire cette trace numérique du troisième ordre, je commence à tracer l'axe rectilinéaire LL' (fig. 31), donné par la partie rationnelle $\frac{1}{3}(1 + 2\,x)$ de la formule. Sur cet axe, je construis la section conique donnée par le radical

$$\sqrt{4\,(x^2 - 1{,}25\,x + 2{,}5)}\,;$$

comme la fonction, contenue dans ce radical, ne peut jamais devenir $= 0$, ni encore moins

négative, elle appartient à une hyperbole convexe par rapport à cet axe. Ses deux branches HH, H'H' au-dessus et au-desous forment l'axe du deuxième ordre pour la trace numérique du troisième ordre qu'il s'agit de construire.

C'est la suite des valeurs de

$$\sqrt{2r' + \frac{SC'}{Vr'}} \text{ et de } \sqrt{2r' - \frac{SC'}{Vr'}}$$

ou de $\sqrt{R'}$ et de $\sqrt{R'_{,}}$, qui détermineront le cours de cette trace numérique ; mais je remarque que les deux parties dont ils sont composés renferment des fonctions de racines ou de facteurs simples

$$(x-a)(x-b) \text{ etc.}$$

qui rendent $2r'$ et SC' successivement nuls à chaque fois que la valeur de x, dans son cours d'accroissement, rencontre une de ces racines réelles : que ces fonctions $2r'$ et SC' deviennent alternativement négatives et positives à chaque racine que x franchit ; qu'elles acquièrent par conséquent des valeurs qui croissent et décroissent alternativement. C'est de-là que résultent les différentes variations de la trace numérique.

Pour déterminer son cours, il faut, 1°. chercher les limites de ses branches ; 2°. quels sont les points de l'axe de x où ces branches le

coupent ; 3°. quels sont ceux où les différentes branches commencent à s'en rapprocher après s'en être éloignées ; points qu'on appelle *maximum ;* 4°. quels sont ceux où elles commencent à s'en éloigner après s'en être approchées ; points qu'on appelle *minimum ;* 5°. quels sont ceux où les ordonnées des différentes branches après avoir eu des accroissemens en progression décroissante, commencent à recevoir des accroissemens en progression croissante, ou réciproquement ; d'où résulte une inversion dans la direction de la courbe, et qu'on appelle points d'inflexion ; 6°. quels sont les points où les branches cessent d'être réelles, et commencent d'avoir un cours imaginaire ; etc.

Tous ces points, qu'on appelle singuliers par une dénomination assez singulière, doivent être appelés *points radicaux* ; parce que toutes ces variations de la trace numérique sont produites par les racines des fonctions composées qui entrent dans leur expression.

Quand la valeur de x a franchi celles de toutes les racines qui entrent dans ces expressions, les branches n'ont plus de variation de courbure que celle qui détermine leurs limites qui sont données par l'expression

$$\sqrt{2r' \pm \frac{SC'}{\sqrt{r'}}} = 0.$$

Les branches qui, après avoir franchi toutes les racines, s'étendent au lieu de ce terme, n'ont plus aucune variation de courbure; elles se redressent en se prolongeant pour former une ligne droite, étant prolongées à l'infini, soit vers les x positifs, soit vers les x négatifs.

Je détermine d'abord le *maximum* ou le *minimum* et les racines de la fonction de $\sqrt{r'}$, on a

$$\sqrt{r'} = \sqrt{4(x-0{,}625)^2 + 2{,}109375},$$

son *minimum* répond à

$$x = 0{,}625.$$

Maintenant, pour trouver les *maximum* et les points d'inflexion des fonctions de $\sqrt{R'}$ et $\sqrt{R'_{\prime}}$, si l'on suivait la méthode connue, il faudrait prendre la différentielle de

$$2r \pm \frac{SC}{\sqrt{r}}$$

et la faire $=0$, ce qui conduirait à une fonction surcomposée de racines dont la seule décomposition exigerait un travail incomparablement plus long que la résolution toute entière de la double équation du troisième-troisième degré par la méthode qu'on expose ici.

Je prends séparément le *minimum* de $2r'$, qu'on vient de déterminer, puis les *maximum*

et les *minimum* de SC' et son point d'inflexion ; on verra comment cette opération suffit.

Comme SC' est du troisième degré, on a par la formule

$$x = -\tfrac{1}{3}(A \pm \sqrt{A^2 - 3B},$$

des *maximum* et *minimum* du troisième degré (280) (A et B étant les coëfficiens de SC'), pour le *minimum*,

$$x = 0{,}376603\,;$$

pour le *maximum*,

$$x = -0{,}720973\,;$$

pour le point d'inflexion,

$$x = -0{,}1722.$$

Je décompose ensuite SC' en ses facteurs simples, et j'ai la nouvelle formule,

$$y_1 - \| \tfrac{1}{3} \begin{cases} -(1+2x) \\ -\sqrt{4(x-0{,}625)^2 + 2{,}109375} \ldots\ldots\ldots\ldots = -\sqrt{r'}. \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2r' + \dfrac{151(x-0{,}871375)(x+0{,}4)(x+0{,}9878)}{\sqrt{r'}}} \end{cases}$$

$$y_2 - \| \tfrac{1}{3} \begin{cases} -(1+2x) \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2r' + \dfrac{151(x-0{,}871375)(x+0{,}4)(x+0{,}9878}{\sqrt{r'}}} \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2r' - \dfrac{151(x-0{,}871375)(x+0{,}4)(x+0{,}9878)}{\sqrt{r'}}} \end{cases}$$

$$y_3 - \| \tfrac{1}{3} \begin{cases} -(1+2x) \\ +\sqrt{r'} \\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{2r' - \dfrac{151(x-0{,}871375)(x+0{,}4)(x+0{,}9878)}{\sqrt{r'}}} \end{cases}$$

Avec cette formule on va trouver tous les points radicaux de la courbe comme on va le voir.

Je prends d'abord la valeur métanégative la plus grande de x, qui appartient à une des racines de $\mathcal{S}C'$, et qui est

$$x = -0,9878;$$

je fais simplement $x = -1$, j'ai

	Quasi-valeurs de la formule.	Valeurs exactes.
$x=-1$ y_1	2,1405.....	$=$ 2,0267.
y_2	$-$ 0,322......	$= -$ 0,3217.
y_3	$-$ 2,8072.....	$= -$ 2,706.

Ces trois valeurs réelles de y annoncent qu'à cette valeur de x correspondent trois branches réelles de la courbe. Comme il n'y a plus de variations que celle qui appartient à la limite des branches, je suppose $x = \frac{1}{0}$, j'ai

$$\sqrt{R'} = \sqrt{16x^2 - 151x^3}$$

et

$$\sqrt{R'_{,}} = \sqrt{16x^2 + 151x^3};$$

les deux branches supérieures qui contiennent $\sqrt{R'}$ sont alors imaginaires; elles ont donc une limite au-delà de

$$x = -1,$$

où l'on a

$$\sqrt{R'} = 0,$$

ou bien

$$2r' + \frac{SC'}{\sqrt{r'}} = 0.$$

En faisant successivement

$$x = -2,\ x = -3,\ \text{etc.}$$

je suis sûr d'arriver à cette limite sans aucune variation de courbe, parce que je ne rencontrerai aucune racine.

En faisant $x = -2$, $\sqrt{R'}$ devient imaginaire, il ne reste plus que la troisième branche, pour laquelle on a

$$y_3 = -5{,}308;$$

c'est donc entre $x = -1$ et $x = -2$ que les deux premières branches commencent. En faisant $x = -1{,}5$, $\sqrt{R'}$ est encore réelle; c'est donc entre -2 et $-1{,}5$. En faisant $x = -1{,}7$, $\sqrt{R'}$ est imaginaire; c'est donc entre $-1{,}5$ et $-1{,}7$ que commence sa valeur. En concentrant une deuxième fois de même, on a, avec deux décimales exactes,

$$x = -1{,}65,$$

pour le point où les deux premières branches commencent à être réelles, et l'on a

$$x = -1{,}65 \begin{cases} y_1 \parallel 1{,}0333. \\ y_2 \parallel 1{,}0333. \\ y_3 \parallel -4{,}366. \end{cases}$$

On peut remarquer d'abord qu'à ce point les deux premières valeurs de y doivent être égales, car la première valeur est

$$y_1 \parallel \tfrac{1}{3}(\mathrm{A} - \sqrt{r}),$$

à cause de

$$\sqrt{\mathrm{R}'} = 0\,;$$

mais il s'ensuit de-là que

$$2r'\sqrt{r'} = -S\mathrm{C}',$$

d'où

$$\sqrt{\frac{2r\sqrt{r'} - S\mathrm{C}'}{\sqrt{r'}}} = (\sqrt{\mathrm{R}'_{,}}) = \sqrt{4r'},$$

d'où l'on a

$$y_2 - \parallel \tfrac{1}{3}(\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{R}'} - \sqrt{\mathrm{R}'_{,}}),$$
$$\parallel \tfrac{1}{3}(\mathrm{A} - \sqrt{r}).$$

D'ailleurs le grand radical $\sqrt{\mathrm{R}'}$ étant $= 0$, il faut que les deux premières branches coupent à ce point l'axe du deuxième ordre, et que par conséquent les coordonnées de la trace numérique du troisième ordre et de l'axe du deuxième ordre soient les mêmes. Ce point est en B (fig. 31).

Pour continuer le cours de la trace numé-

rique, je prends après $x = -1$ la valeur métanégative

$$x = -0{,}720973,$$

qui la suit immédiatement, et qui répond au *maximum* de SC'; j'ai donc, pour le *maximum* de SC',

$$x = -0{,}720973 \begin{cases} y_1 \;\|\; 2{,}1837. \\ y_2 \;\|\; -0{,}0154. \\ y_3 \;\|\; -2{,}315. \end{cases}$$

En continuant, je prends la valeur

$$x = -0{,}4,$$

qui est la deuxième racine de SC', qui donne pour la deuxième racine de SC',

$$x = -0{,}4 \begin{cases} y_1 \;\|\; 2{,}0898. \\ y_2 \;\|\; 0{,}0666. \\ y_3 \;\|\; -1{,}9564. \end{cases}$$

Vient ensuite la valeur

$$x = -0{,}1722,$$

qui correspond au point d'inflexion de la fonction SC', et j'ai

$$x = -0{,}1722 \begin{cases} y_1 = 1{,}8367. \\ y_2 = 0{,}6653. \\ y_3 = -1{,}7465. \end{cases}$$

Je fais ensuite $x = 0$, quoique cette valeur ne réponde à aucun point radical, et j'ai

$$x = 0 \begin{cases} y_1 = & 1,732. \\ y_2 = & 1. \\ y_3 = & -1,732. \end{cases}$$

La première valeur positive de x qui suit immédiatement répond au *minimum* de SC', où l'on a

$$x = 0,3766,$$

je fais

$$x = 0,4, \text{ j'ai } y_3 = -1,4872.$$

Les deux premières valeurs de y sont imaginaires ; c'est donc entre $x = 0$, et $x = 0,4$ que $\sqrt{R'} = 0$, j'arrive par la concentration à la valeur $x = 0,072$, pour le point où $\sqrt{R'} = 0$, et où par conséquent les valeurs de la trace numérique cessent d'être réelles, c'est au point C (fig. 31).

La valeur de x qui suit immédiatement est celle qui correspond au *minimum* de

$$\sqrt{r'} = 0,625.$$

Les deux valeurs de y_1 et y_2 qui correspondent sont encore imaginaires, et l'on a pour

$$x = 0,625 \ldots\ldots\ y_3 = -1,2473;$$

en continuant de faire croître x, j'arrive à la dernière racine de SC', qui donne

$$x = 0,8713 \begin{cases} y_1 = & 2,5906. \\ y_2 = & 0,9142. \\ y_3 = & -0,7623. \end{cases}$$

Puisque les deux premières valeurs de y redeviennent réelles, il faut conclure que les deux premières branches recommencent entre

$$x = 0{,}625 \quad \text{et} \quad x = 0{,}8713.$$

Je trouve par la concentration que le point où elles recommencent répond au point $x = 0{,}695$, et l'on a

$$x = 0{,}695 \begin{cases} y_1 = 1{,}766. \\ y_2 = 1{,}766. \\ y_3 = -0{,}7623. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à chercher les limites des branches de la trace numérique vers les x positifs, comme on l'a cherché d'abord vers les x négatifs. Si je fais $x = \frac{1}{0}$, j'ai

$$\sqrt{R'}_{,} = \sqrt{16\,x^4 - 151\,x^2},$$

d'où je conclus que les deux dernières branches se terminent et forment une courbe fermée au point où $\sqrt{R'}_{,} = 0$: ce point étant au-delà de $x = 0{,}8713$, je fais les suppositions successives $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc., j'ai d'abord

$$x = 1 \begin{cases} y_1 = 3. \\ y_2 = 0. \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Les deux valeurs corrélatives $x = 1$, $y = 3$, sont celles d'après lesquelles l'équation a été formée. Les deux dernières valeurs par leur

égalité annoncent déjà que c'est à ce point que les deux branches coïncident. Aussi quelque valeur que l'on suppose à x au-delà, les ordonnées des deux dernières branches seront imaginaires.

En réunissant ces différentes valeurs, on aura le tableau numérique des valeurs corrélatives des x et des y pour les points qu'on a voulu considérer, et si l'on fait passer une trace à l'extrémité des différentes valeurs des ordonnées, on aura une trace numérique, telle que la présente la fig. 31, qui exprimera la même chose que le tableau numérique, mais qui l'exprimera en caractères graphiques.

Il faut remarquer maintenant qu'en prenant séparément les points radicaux des fonctions

$$2r' \text{ et } \frac{\delta C'}{\sqrt{r'}}$$

dans le radical

$$\sqrt{2r' \pm \frac{\delta C'}{\sqrt{r'}}},$$

on a bien pour chacune de ces deux fonctions séparées une portion curviligne sans variations; mais comme on prend leur somme pour $\sqrt{R'}$, et leur différence pour $\sqrt{R'}$, il doit résulter une inflexion dans l'intervalle des deux valeurs que l'on prend, toutes les fois que la

fonction $2r'$ va en croissant dans cet intervalle, tandis que $\frac{SC'}{\sqrt{r'}}$ va en décroissant, ou réciproquement; mais comme il ne s'agit pas ici d'une courbe géométrique et seulement d'une trace numérique approximative; cette erreur entre dans la latitude des quasi-valeurs qu'on obtient.

Il serait facile au reste de déterminer le lieu de ces inflexions, et l'on a le moyen de reconnaître le cas où elles ont lieu; mais ce travail est toujours inutile, et la concentration comme on le verra en réduisant ces latitudes à une quantité aussi petite que l'on veut, fait disparaître ces erreurs.

(304) Je viens maintenant à la deuxième équation

$$y^3-(2x+3)y^2+(3x^2+4x-6)y+4x^3+3x^2+6x+2=0,$$

j'ai d'abord

$$\sqrt{A'^2-3B'}=\sqrt{r'}=\sqrt{5(5,4-x^2)},$$

$$SC'=-146(x^3+1,109589x^2+0,369863x-1,109589);$$

en décomposant cette fonction en facteurs simples, on trouve qu'elle a deux racines imaginaires, et l'on a

$$SC'=-146[(x+0,899432)^2+0,800811](x-0,689271);$$

on a donc pour les trois valeurs de y en supprimant les dernières décimales,

$$y_1 - \| \begin{cases} -\frac{1}{3}(2x+3) \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5(5,4-x^2)} \\ -\frac{1}{2.3}\sqrt{2.5(5,4-x^2) - \frac{146[(x+0,9)^2+0,8](x-0,68927)}{\sqrt{5(5,4-x^2)}}} \end{cases}$$

$$y_2 - \| \begin{cases} -\frac{1}{3}(2x+3) \\ +\frac{1}{2.3}\sqrt{2.5(5,4-x^2) - \frac{146[(x+0,9)^2+0,8](x-0,68927)}{\sqrt{5(5,4-x^2)}}} \\ -\frac{1}{2.3}\sqrt{2.5(5,4-x^2) + \frac{146[(x+0,9)^2+0,8](x-0,68927)}{\sqrt{5(5,4-x^2)}}} \end{cases}$$

$$y_3 - \| \begin{cases} -\frac{1}{3}(2x+3) \\ +\frac{1}{3}\sqrt{5(5,4-x^2)} \\ +\frac{1}{2.3}\sqrt{2.5(5,4-x^2) + \frac{146[(x+0,9)^2+0,8](x-0,68927)}{\sqrt{5(5,4-x^2)}}} \end{cases}$$

La partie rationnelle $\frac{1}{3}(2x+3)$ de cette formule est construite par l'axe FD (fig. 32), sur lequel je construis le radical originel

$$\frac{1}{3}\sqrt{r'} = \sqrt{5(5,4-x^2)}$$

par l'axe du deuxième ordre, ou par l'ellipse HG H'G'. Pour construire ensuite la trace numérique de l'équation, j'observe d'abord qu'elle a deux de ses branches limitées par l'axe de l'ellipse GG' qui est déterminé par l'équation

$$x^2 - 5,4 = 0,$$

d'où

$$x = \pm 2,32594.$$

J'observe, en second lieu, que tant que x sera négatif, la fonction de SC' formera un résultat positif, et par conséquent $\sqrt{R'}$ ne contiendra que des quantités réelles depuis la valeur

$$x = -2,32594;$$

mais dans l'expression de $\sqrt{R'}$,, comme la fonction de SC' est prise avec un signe contraire, ce grand radical ne commencera à être réel, que lorsqu'on aura

$$2r' = \frac{SC'}{\sqrt{r'}}.$$

On a deux limites pour déterminer ce point, la première est

$$x = -\sqrt{r'},$$

ou

$$x = -2,32594;$$

la deuxième a lieu lorsque

$$SC' = 0,$$

ce qu'on obtient en prenant la valeur de sa racine réelle

$$x = 0,68927.$$

C'est donc entre ces deux limites qu'on peut par les substitutions successives trouver le point où les deux branches inférieures coupent l'axe elliptique; c'est-à-dire où elles commencent à être réelles. En faisant $x = -2$, on a

$\sqrt{R'}$, imaginaire, et pour la branche réelle $y = 3$; en faisant $x = -1$, $\sqrt{R'}$, est réel, et l'on a pour les trois valeurs de y,

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 3,4491. \\ y_2 = -1. \\ y_3 = -1,4494. \end{array} \right.$$

C'est donc entre -2 et -1 que les deux branches inférieures commencent à être réelles en coupant l'axe elliptique; si l'on concentre, on trouve, pour valeur approximative,

$$x = -1,02,$$

on a alors les deux branches inférieures égales,

$$x = -1,02 \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 3,4324. \\ y_2 = -1,2362. \\ y_3 = -1,2362. \end{array} \right.$$

Et comme avant cette valeur l'équation a toujours une racine réelle, il s'ensuit que la première branche sera toujours réelle en remontant vers les x négatifs; alors SC' sera toujours positif et ne cessera plus de l'être; ainsi toutes les fois que SC' ne pourra plus cesser d'être positif, la première branche ne cessera plus d'être réelle, quoique $\sqrt{r'}$ acquière une valeur imaginaire dans $\sqrt{R'}$.

Maintenant, en faisant croître x dans la direction positive, quand on aura franchi la

valeur de la racine $x = 0{,}68927$, qui rend $SC' = 0$, sa fonction

$$[(x + 0{,}9)^2 + 0{,}8](x - 0{,}69)$$

ne cessera plus d'être positive, et par conséquent SC', à cause de son coëfficient -146, sera toujours négatif; alors le radical $\sqrt{R}$ cessera à son tour d'être réel quand on aura

$$2r' = \frac{SC'}{\sqrt{r'}};$$

la première limite commence à

$$SC' = 0,$$

ou

$$x = -1{,}68927,$$

et l'autre à $x = \sqrt{r'}$ qui est l'autre limite des trois branches réelles; en faisant les substitutions successives $x = 1$, $x = 2$, j'ai d'abord pour $x = 1$,

$$x = 1 \begin{cases} y_1 = 3{,}4493. \\ y_2 = 3. \\ y_3 = -1{,}4493. \end{cases}$$

Comme les deux premières valeurs de y diffèrent peu l'une de l'autre, on peut conclure que c'est aux environs de cette valeur de x que les deux branches supérieures se joignent en coupant l'axe elliptique; en effet, si l'on

fait $x = 1{,}01$, $\sqrt{R'}$ devient imaginaire, et c'est à peu près à

$$x = 1{,}005.$$

Quant à la troisième branche, elle sera toujours réelle, et SC' dans $\sqrt{R'}$, sera toujours négatif. Ainsi quand SC' ne pourra plus cesser d'être négatif, la branche inférieure sera toujours réelle, quoique le radical originel $\sqrt{r'}$, contenu dans $\sqrt{R'_{,}}$, devienne imaginaire.

Ainsi la latitude de la triple branche s'étend depuis

$$x = -1{,}02$$

jusqu'à

$$x = 1{,}005,$$

par approximation. SC' n'ayant qu'une racine réelle, il ne peut pas y avoir de solution de continuité dans cet intervalle comme dans le premier exemple.

Pour achever de construire la courbe, je fais $x = 0$, et j'ai exactement

$$x = 0 \begin{cases} y_1 = 4{,}1144. \\ y_2 = 0{,}2943. \\ y_3 = -1{,}4087. \end{cases}$$

Je différentie $SC'_{,}$, et j'ai pour le *maximum*,

$$x = -0{,}2536;$$

pour le *minimum*,

$$x = -0{,}4864.$$

Je détermine les triples ordonnées qui correspondent à ces valeurs.

Maintenant, si je prends la double valeur qui correspond aux deux extrémités de l'axe du deuxième ordre, où $\sqrt{r'} = 0$, et où l'on a

$$x = \pm 2{,}32593,$$

$\sqrt{R'}$ et $\sqrt{\overline{R}'}$, seront infinis; mais il faut observer alors que l'équation ne diffère d'un binôme au cube que par le dernier terme, on résout alors l'équation comme celle du deuxième degré; c'est-à-dire qu'on complète le cube dans le premier membre. Ainsi l'équation générale

$$y^3 + A'y^2 + B'y + C' = 0,$$

quand

$$A^2 - 3B = 0$$

devient

$$y^3 + A'y^2 + \tfrac{3}{9}A'^2 y + C' = 0,$$

on fait alors

$$y^3 + A'y^2 + \tfrac{3}{9}A'^2 + \tfrac{1}{27}A'^3 = \tfrac{1}{27}A'^3 - C';$$

d'où l'on a

$$y = -\tfrac{1}{3}A' + \sqrt[3]{\tfrac{1}{27}A'^3 - C'};$$

en la résolvant de cette manière, on a pour

$x = -2{,}32593 \ldots\ldots\ldots\; y_1 = 3{,}03$,

pour

$x = +2{,}32593 \ldots\ldots\ldots\; y_3 = -1{,}48454$;

en traduisant graphiquement ces différentes valeurs, on a la trace numérique telle qu'on la voit (fig. 32).

Maintenant, si l'on superpose les deux traces numériques des deux équations, ou si on les construit avec les mêmes axes, elles se couperont d'abord en un point M (fig. 33) dont les deux valeurs corrélatives sont $x=1$, $y=3$; ce sont les deux valeurs qui ont servi à former les deux équations.

Elles ont encore deux autres points communs qui résultent de la combinaison des quantités additionnelles avec les quantités multiples; et l'on n'a que trois valeurs corrélatives au lieu de neuf que l'on pourrait avoir par la méthode connue d'élimination.

On voit que par les méthodes qu'on a développées, on ne se sert que des formules du troisième degré pour résoudre les équations du troisième degré à deux variables.

Je ne déterminerai pas les différentes formes dont peut être susceptible la trace numérique du troisième ordre, elles dépendent de la re-

lation des coëfficiens de la proposée; mais quels que soient ces coëfficiens, la méthode de solution, par sa généralité, atteint également toute espèce d'équation, quelle que soit sa forme. Ainsi il est inutile de faire ici l'énumération des lignes du troisième ordre, on a toujours celle qui doit avoir lieu par le résultat de la formule.

Cette même formule servira également pour les équations dans lesquelles x serait élevé à un degré quelconque ; si SC' contenait une fonction en x supérieure au troisième degré, il en résulterait seulement une augmentation de points radicaux, qu'on déterminerait comme ci-dessus ; si $\sqrt{r'}$ renfermait une fonction de x du troisième ou du quatrième degré, etc., l'axe immédiat de la trace numérique, au lieu d'être une ellipse, serait une trace du deuxième-troisième ou du deuxième-quatrième degré, etc., sur laquelle se construirait le dernier radical de la trace numérique.

Si la formule contenait dans quelques-uns de ses termes des dénominateurs en fonctions de x qui appartinssent à l'équation ; c'est-à-dire si le coëfficient de y^3 était de la forme

$$A x^m + B x^{m-1} + \text{etc.}$$

cette fonction formerait un dénominateur dans les différens termes de la formule ; alors il y aurait autant d'asymptotes que cette fonction aurait de facteurs simples réels, comme on l'a vu ci-dessus.

Pour résoudre les équations du quatrième-quatrième degré, on suivra la même marche que celle qui a été suivie pour celles du troisième-troisième degré ; on employera alors la formule (198), première partie. Quoiqu'elle ne donne que les quasi-valeurs des deux racines extrêmes de l'équation, il sera très-facile de suppléer aux deux racines intermédiaires.

D'après la nature de cette formule, on voit que la trace numérique aura, pour son axe immédiat, une courbe du troisième ordre, qu'on construira comme les précédentes, et c'est sur cet axe que l'on construira les valeurs du dernier radical qui constitueront la trace numérique. Ainsi la marche que l'on a suivie indique celle qu'il faut suivre pour construire les traces numériques des différens ordres.

De la concentration.

305. Par les méthodes qu'on vient de développer on n'obtient que des quasi-valeurs qui ne donnent pas par conséquent des traces numé-

riques rigoureuses, mais seulement approximatives. Il reste à développer le moyen de concentration qui puisse conduire à des valeurs exactes.

Il faut d'abord remarquer qu'on ne se propose pas ici de construire des traces numériques exactes dans tout leur cours ; ces traces ne sont que des moyens préparatoires pour parvenir aux valeurs corrélatives que l'on cherche, et qui sont les seules qu'on a besoin de déterminer. Ainsi dans les deux équations ci-dessus du troisième-troisième degré qu'on vient de résoudre, on n'a besoin de déterminer exactement que les valeurs corrélatives qui répondent aux trois points d'intersection des deux traces numériques.

Pour y parvenir, je suppose que l'ordonnée BC (fig. 34 et 35), soit celle qui correspond au vrai point d'intersection ; à une première valeur approximative AP de x, je prends exactement ou seulement avec deux décimales exactes la valeur de y qui lui correspond dans les deux équations, j'aurai deux ordonnées PM et PN, la première plus grande que la deuxième ; je prends ensuite une autre valeur de x qui croît dans la direction AC, et je cherche également dans les deux équations les valeurs de y qui lui correspondent. Si la pre-

mière P′M′ surpasse encore la deuxième P′N′ avec une différence moindre que la première fois, je conclus que je suis dans la direction qui conduit au point d'intersection ; si la différence était plus grande, je conclurais que je m'en éloigne, et pour y parvenir, je prendrais pour x des valeurs qui croîtraient dans une direction contraire.

Enfin, si j'obtenais pour l'ordonnée de la deuxième équation une valeur P″N″, qui fût à son tour plus grande que celle de la première P″M″, je conclurais de-là que j'ai dépassé le point d'intersection, comme on le voit par l'inspection des fig. 34 et 35. Alors je prendrai pour x une valeur intermédiaire entre ces valeurs de y qui sont immédiatement endeçà et au-delà du point d'intersection, et je la prendrai plus près des valeurs PM et PN qui différeront moins ; j'arriverai par ce moyen à un premier degré d'approximation : je traiterai cette valeur approchée de x comme la première fois ; j'en obtiendrai une seconde plus rapprochée, et ainsi de suite. Si les valeurs corrélatives du point d'intersection sont incommensurables, j'arriverai au degré d'approximation que je voudrai, et si ces valeurs sont commensurables, je ne tarderai pas à le reconnaître.

Si l'on n'a qu'une équation à deux variables, il suffira de concentrer l'équation en y pour les valeurs de x qu'on voudra prendre par les méthodes de concentration exposées dans la première partie.

Si l'on veut avoir les points exacts des *maximum* de la trace numérique, comme on les a déjà par approximation, il suffira de prendre, par une méthode semblable à celle qu'on vient d'indiquer, deux ordonnées entre lesquelles on parviendra à déterminer la plus grande.

L'usage que l'on fait du calcul différentiel pour déterminer les points radicaux des courbes, présente une marche plus rigoureuse, plus générale et plus simple en apparence que les nouvelles méthodes qui viennent d'être exposées. Sans doute les opérations du calcul sont rigoureuses, parce qu'on y prononce toujours l'égalité; mais elles ne s'appliquent qu'à des symboles algébriques x, y, etc. et leur résultat laisse tout le calcul à faire; il faut ensuite avoir recours à l'élimination, et l'on aboutit à des équations surcomposées que les méthodes connues ne peuvent plus résoudre.

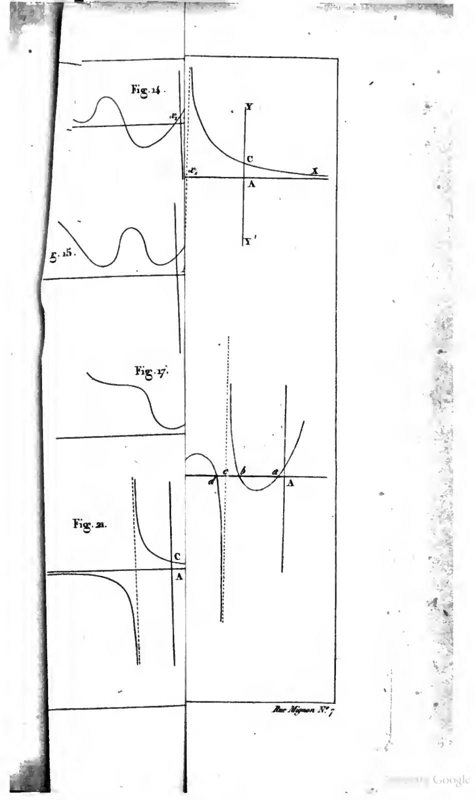
Dans le calcul des inéquations on ne procède rigoureusement que relativement aux li-

mites, les opérations du calcul s'étendent dans une latitude que l'on rétrécit et que l'on fait évanouir, et ce n'est qu'à la fin qu'on prononce l'égalité, lorsque l'on est parvenu aux valeurs que l'on cherche. Quelles que soient les méthodes que l'on employe dans les équations composées, ce n'est que par le calcul des inéquations qu'on peut parvenir à ce dernier but. Ce calcul restait donc à trouver pour compléter les opérations de l'analyse.

FIN.

ERRATA.

Pag. 8	*lig.* 11	A, B, M, *lisez* A′, B′, M′.
9	6	L′, *lisez* L″.
9	9	*Idem.*
9	14	Q, *lisez* C‴ + etc.).
27	24	QQ — Q′, *lisez* Q — Q′.
36	25	nombre, *lisez* membre.
93	19	— C″ o, *lisez* — C ‖ o.
129	1	$-\left(\begin{matrix}\varpi > k\varpi \\ \vee \quad\quad \vee \\ p_1 \quad\quad p_1\end{matrix}\right.$ etc., *lisez* $-\left(\begin{matrix}\varpi > k\varpi \\ \vee \quad\quad \wedge \\ p_1 \quad\quad p_1\end{matrix}\right.$ etc.
133	23	$\frac{x^2 - 2}{x}$, *lisez* $\frac{x^2 - Q}{x}$.
173	6	$A + \sqrt{r}$, *lisez* $A - \sqrt{r}$.
186	26	aux deux exemples du tableau, *lisez* à deux exemples.
187	12	$p_3 > \phi$, *lisez* $p_3 < \phi$.
195	17	$SC \mp 2r\sqrt{r} < 0$, *lisez* $SC \mp 2r\sqrt{r} > 0$.
201	5	$\begin{cases} < k\Delta\phi, \\ > \xi', \end{cases}$ *lisez* $\begin{cases} > k\Delta\varpi. \\ < \xi'. \end{cases}$
203	5	$x_3 - < \frac{1}{3}($ etc., *lisez* $x_3 - > \frac{1}{3}($ etc.
220	8	$\frac{4}{3}(A + \sqrt{r}$, *lisez* $\frac{1}{4}(A + \sqrt{r})$.
220	12	$\frac{1}{4}\Pi^2$, *lisez* $\frac{1}{3}\Pi^2$.
220	18	$\frac{1}{4}\Phi^2$, *lisez* $\frac{1}{3}\Phi^2$.
223	9	$\frac{2}{64}$, *lisez* $\frac{1}{64}$.
228	2	$C - (B\Pi\varpi)\varpi$, *lisez* $C - (B - \Pi\varpi)\varpi$.
230	12	ϕ, *lisez* Φ.
238	19	$= - \frac{x^3 - Q - R}{x^2}$, *lisez* $= \frac{-x^3 - Qx - R}{x^2}$.
243	15	$3B'$, *lisez* $3B_{\prime}$.
345	der.	ϕ, *lisez* ϕ'.
246	4	sont imaginaires, *lisez* sont réelles.
292	22	$\sqrt{\Phi''^2 - \frac{C''}{\varphi''}}$, *lisez* $\sqrt{\frac{1}{4}\Phi''^2 - \frac{C}{\varphi''}}$.
296	13	$15A^2 - B50AC$, *lisez* $15A^2B - 50AC$.
306	6	313, *lisez* 220.
358	2	F, *lisez* E.


Fig. 14.
Y
C
X
A
Y'
g. 15.
Fig. 17.
c
b
a
d
A
Fig. 21.
C
A
Rue Mignon N° 7







